MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Auxiliar 2: derivadas de funciones y aplicaciones

25 de Septiembre de 2015

1. Resumen

1. Definición: Diremos que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es derivable en el punto $x_o\in(a,b)$, si existe el límite
$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$
Dicho límite se llama la derivada de f en x_o y se denota $f'(x_o)$ o bien $\frac{df}{dx}(x_o)$
2. Regla de Fermat: Si $\bar{x}\in(a,b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x})=0$
3. TVM: Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), con $g(b)\neq g(a)$ y $g'(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$. Entonces, existe $c\in(a,b)$ tal que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$
En particular, si $g(x)=x$ se tiene:
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$
4. Teorema: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si $f'(x)\geq 0$ (≤ 0) para todo $x\in(a,b)$, entonces f es creciente (decreciente) en $[a,b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.

2. Problemas

1. Sean $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que cumplen lo siguiente:
$$g(x)=xf(x)+1\ y\ lim_{x\to 0}f(x)=1$$
$$g(a+b)=g(a)g(b)$$
Demuestre que $g'(x)=g(x)$
2. Sea $f(x)$ continua en $[0,\infty)$, diferenciable en $(0,\infty)$ tal que $f(0)=0$ y con $f'(x)$ creciente en $\mathbb{R}^+$. Pruebe que $f'(x)>f(x)/x$ en $\mathbb{R}^+$ y deduzca que la función $g(x)=f(x)/x$ es creciente en $\mathbb{R}^+$
3. (**Parte a pregunta 1 control primavera 2014**). Demuestre que existe un único $x_o\in(1,2)$ que es solución de la ecuación:
$$\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x-1}=\frac{3}{x(x+1)}$$
4. Sean $a_1,a_2,...,a_N\in\mathbb{R}$ tales que $a_i>0,\forall i$. Suponga además que:
$$f(x)=a_1^x+a_2^x+...+a_N^x\geq N,\forall x\in\mathbb{R}$$
Demuestre que f posee un mínimo global, calcúlelo y pruebe que:
$$a_1a_2...a_N=1$$
5. Un triángulo rectángulo se forma en el primer cuadrante con un segmento de recta que es tangente a la gráfica de $y=1/x^2$ y cuyos puntos terminales están en los ejes coordenados.¿Existe un área máxima posible para este triángulo?¿un área mínima?, si tal área existe calcúlela.

3. Problemas propuestos

1. (**Parte a pregunta 2 control primavera 2014**). Sea $f(x)$ una función tal que $f'(x)$ es constante $\forall x \in Dom(f)$. Demuestre que la función

$$\Phi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

es también constante cualquiera sea $a \in Dom(f)$

2. Un triángulo rectángulo se forma en el primer cuadrante con un segmento de recta que es tangente a la gráfica de $y = 1/x$ y cuyos puntos terminales están en los ejes coordenados.¿Existe un área máxima posible para este triángulo?¿un área mínima?, si tal área existe calcúlela.