MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor : Juan Dávila B.
Auxiliar : Diego García S.

Auxiliar extra 1: continuidad de funciones

14 de Septiembre de 2015

1. Resumen

1. TVI: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, Si $c, d \in f([a, b])$ entonces para todo número e comprendido entre c y d, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$
2. Teorema de Weierstrass: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su máximo y su mínimo en $[a, b]$
3. Definición de continuidad uniforme: $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que
$$(\forall x, y \in A)|x - y| \leq \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
.
4. Teorema: Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\bar{x} \in A$.

2. Problemas

1. Dado $a > 0$, sea $f : [0, 2a] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(0) = f(2a)$. Pruebe que existe $\bar{x} \in [0, 2a]$ tal que $f(\bar{x}) = f(\bar{x}+a)$
2. Demuestre que la ecuación $cos(x) = e^{-x}$ definida $\forall x \in \mathbb{R}$ posee infinitas raíces.
3. El objetivo de esta pregunta es probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq |x|$ alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ (es decir, $\exists a \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}, f(a) \leq f(x)$). Para ello considere $y_o = f(0)$ y el intervalo $I = [-y_o, y_o]$.
   a) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}/I, f(x) > y_o$
   b) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de I.
4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:
   a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$
   b) f es continua en 0

   Demuestre que f es uniformemente continua.

3. Problemas propuestos

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en todo su dominio
   a) Pruebe que existen x_* y $x^* \in [a, b]$ tales que:
   $$f(x_*) \leq \frac{f(x_1 + f(x_2)}{2} \leq f(x^*) \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$
   b) Demuestre que dados x_1 y $x_2 \in [a, b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a, b]$ tal que
   $$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$