

MA1002-6 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor : Juan Dávila B.

Auxiliar : Diego García S.



Auxiliar 1: continuidad de funciones

11 de Septiembre de 2015

1. Resumen

- Definición de subsucesión: Sea (s_n) una sucesión. Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Se llama subsucesión de s_n generada por f , a la sucesión u_n definida por:

$$u_n = s_{f(n)} \quad (1)$$

- Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.
- Definición de continuidad:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) |x - x_o| < \delta \implies |f(x) - f(x_o)| < \epsilon$$

- f es continua ssi: para toda sucesión x_n en $\text{Dom}(f)$ se tiene que:

$$x_n \longrightarrow x_o \implies f(x_n) \longrightarrow f(x_o)$$

2. Problemas

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]$ sucesión tal que $f(a_n)$ converge a $\bar{y}$. Demuestre que existe $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{y}$
- Considere una sucesión $u_n, n \in \mathbb{N}$ que verifica las siguientes propiedades:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n} = l, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} - u_n| = 0$$

a-Pruebe que $\forall \epsilon > 0, \exists k_o \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_o, k$ par, se cumple que $|u_k - l| < \epsilon$

b-Pruebe que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = l$, y deduzca que $\forall \epsilon > 0, \exists k_1 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_1, k$ impar, se tiene que $|u_k - l| < \epsilon$

c-Concluya que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = l$.

- Considere la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta (1 - e^x) \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

- Justifique por qué f es continua $\forall x \in \mathbb{R}/\{0\}, \forall \beta \in \mathbb{R}$.
 - Pruebe que si $\beta \geq 0$, entonces f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - Para $\beta = -1$, utilice la sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ para probar que f no es continua en $x = 0$.
- Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $\bar{x} \in \mathbb{R}$, con $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$. Probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (\bar{x} - \epsilon, \bar{x} + \epsilon)$. Indicación: puede ser conveniente analizar primeramente el caso $g = 0$.

3. Problemas propuestos

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y supongamos que $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(x) < 0$ para todo $x < c$ y $f(x) > 0$ para $x > c$. Demuestre que $f(c) = 0$