MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

"La lógica nos hace rechazar ciertos argumentos, pero no nos puede hacer creer ninguno" - Henri Lebesgue

Auxiliar 12

26 de Noviembre de 2015

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función decreciente y derivable en $\mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

   a) Pruebe que $\int_0^\infty |f'(x)|dx < \infty$ (converge).
   b) Pruebe que $\int_0^\infty f(x)sen(3x)dx$ converge.

2. Para $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ continua se define la integral

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} f(x)dx$$

   a) Demostrar que si existen M y b reales tales que $\forall x \in [0,\infty)$, $|f(x)| \leq Me^{bx}$ entonces la integral $\mathcal{L}(f)$ converge para todo $\alpha > b$.
   b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y tal que existen los reales de la parte anterior que acotan a $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$. Demostrar que para $\alpha > b$

$$\mathcal{L}(f') = \alpha\mathcal{L}(f) - f(0)$$

   y con esto concluya que

$$\mathcal{L}(f'') = \alpha^2\mathcal{L}(f) - \alpha f(0) - f'(0)$$

   c) Usando lo anterior pruebe que

$$\mathcal{L}(sen(\omega x)) = \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

3. (Propuesto) Sea la función definida en $(-1,\infty)$ por $f(x) = \frac{x}{(1+x)^3}$. Para los volúmenes y áreas siguientes se pide determinar si son finitos y calcularlos

   a) Área de la región $R = \{(x,y)|\ 0 \leq x;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.
   b) Área de la región $Q = \{(x,y)|\ -1 \leq x \leq 0;\ f(x) \leq y \leq 0\}$.
   c) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte a) en torno a OX.
   d) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte a) en torno a OY.