MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

"Dado que la textura del Universo es la más perfecta y la obra de un Creador sapientísimo, nada sucede en el Universo sin obedecer a una regla de máximo o mínimo" - Leonhard Euler

Auxiliar 7

20 de Octubre de 2015

1. a) Calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{2+x}dx$.

   b) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{2n^2+ni}$, identificando una suma de Riemann.

2. Sea

$$S_n = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i\sqrt{n^2-i^2})$$

   Identifique S_n con una Suma de Riemann y calcule su límite.

3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$ y f es integrable en $[a,b]$. Demuestre que $f^2(x)$ es integrable en $[a,b]$.

4. Considere la sucesión

$$a_n = \int_0^n q^x dx, \quad con\ 0 < q < 1$$

   a) Explique por qué $(a_n)_n$ está bien definida, es decir, por qué q^x es Riemann Integrable en $[0,n]$ y muestre que es estrictamente creciente.

   b) Calcule las sumas de Riemann Inferior y Superior para q^x y use la partición $\mathcal{P} = \{0,1,\ldots,n\}$.

   c) Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para $(a_n)_n$.

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad q\frac{1-q^n}{1-q} \leq \int_0^n q^x dx \leq \frac{1}{1-q}$$

   d) Concluya que a_n converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$