Pauta Aux Extra 1

P1

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x = 0 \\ \text{sen}(bx) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) p.d.q. : Encontrar a, b tal que $f \in \mathcal{C}^1$

Primero veamos que f debe ser continua:

·) f continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pues x, $\text{sen}(bx)$ son fnes. continuas

·) en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow \cancel{\lim_{x \to 0^+} \overset{\nearrow 0}{\text{sen}(bx)}} = \cancel{\lim_{x \to 0^-} \overset{\nearrow 0}{x}} = f(0) = a$$

límites laterales iguales $\therefore f(0) = 0$

ahora la diferenciabilidad:

·) f derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pues x, $\text{sen}(bx)$ derivables

·) en $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \overset{\nearrow 0}{f(0)}}{x - 0} = f'(0) \Rightarrow$$

$$\cancel{\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{\nearrow b}{\text{sen}(bx)}}{x}} = \cancel{\lim_{x \to 0^-} \overset{\nearrow 1}{\frac{x}{x}}} = f'(0)$$

$\therefore f'(0) = 1 = b$ (límites laterales se cumplen si $\boxed{b = 1}$)

Así

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

b)

$$P(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2$$

Falta encontrar $f''(0)$:

$$f''(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \underbrace{\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x}}_{\text{límite conocido}} \to 0 = \lim_{x \to 0^-} \frac{1 - 1}{x} \to 0$$ (límites laterales)

Así $\therefore f''(0) = 0$

Luego $P(x) = 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2} x^2 = x$

P2)

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$

i) $F(x) = f(x) - f(0)\cos(x) - f'(0)\,\mathrm{sen}(x)$

p.d.q.: $F''(x) + F(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Claramente $\cos(x)$, $\mathrm{sen}(x) \in \mathcal{C}^{\infty}$ (se pueden derivar infinitas veces) y f es 2 veces derivable $\Rightarrow$ F es 2 veces derivable.

$$F''(x) = f''(x) + \cancel{f(0)\cos(x)} + \cancel{f'(0)}\,\mathrm{sen}(x)$$

$$F(x) = f(x) - \cancel{f(0)}\cos(x) - \cancel{f'(0)}\,\mathrm{sen}(x)$$

(+)

$$\Rightarrow F''(x) + F(x) = f''(x) + f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ii) p.d.q.: $\forall x \in \mathbb{R}$ $(F'(x))^2 + (F(x))^2 = \text{cte} \in \mathbb{R}$.

Sea $g(x) = (F'(x))^2 + (F(x))^2$

$$g'(x) = 2F'(x)\cdot F''(x) + 2F(x)F''(x)$$

$$= 2F'(x)\,(\underbrace{F''(x) + F(x)}_{=0}) = 0 \quad \text{(por la parte i))}$$

$$\Rightarrow g(x) = \text{cte} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calculemos esta constante

$$g(0) = (F'(0))^2 + (F(0))^2$$

$$= (f(0) - f(0))^2 + (f'(0) - f'(0))^2 = 0$$

$$\therefore (F'(x))^2 + (F(x))^2 = 0$$

necesariamente $F(x) = 0$ pues es suma de valores positivos $= 0$

$$\Rightarrow f(x) - f(0)\cos(x) - f'(0)\,\mathrm{sen}(x) = 0$$

$$\therefore f(x) = f(0)\cos(x) + f'(0)\,\mathrm{sen}(x) \quad //$$

b) $f(t) = u(t) - v(t)$; $u(0) = v(0)$, $u(T) = v(T)$

p.d.q $\exists\, t_0 \in [0,T]$ tal que $u'(t_0) = v'(t_0)$

claramente $f(0) = u(0) - v(0) = 0$

$f(T) = u(T) - v(T) = 0$

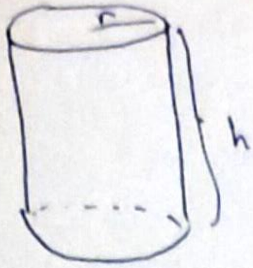
Usando T V M para f en $[0,T]$

$$\frac{\cancelto{0}{f(T)} - \cancelto{0}{f(0)}}{T-0} = f'(t_0) \; ; \; t_0 \in [0,T]$$

$$\Rightarrow f'(t_0) = 0 = u'(t_0) - v'(t_0)$$

$$\therefore u'(t_0) = v'(t_0) \text{ con } t_0 \in [0,T]$$

P3)



$ar + bh = a \cdot b \quad (*)$

el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 \cdot h$

Despejando h en $(*)$

$$h = a - \left(\frac{a}{b}\right) \cdot r$$

$$\Rightarrow V(r) = \pi r^2 \left(a - \frac{a}{b} r\right)$$

$$= \pi r^2 a - \frac{\pi a}{b} r^3$$

$$V'(r) = 2\pi r a - \frac{3\pi a}{b} r^2$$

$$= \pi r a \left(2 - \frac{3r}{b}\right) = 0$$

entonces $r = 0 \wedge r = \frac{2b}{3}$ son puntos críticos y descartamos $r = 0$

veamos que $\bar{r} = \frac{2b}{3}$ es máximo

$$V''(r) = 2\pi a - \frac{6\pi a}{b} r$$

$$V''(\bar{r}) = 2\pi a - 4\pi a = -2\pi a < 0$$

$\therefore \bar{r} = \frac{2b}{3}$ es máximo para $V(r)$