

MA1002-02 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Patricio Felmer A.**Auxiliar:** Diego Marchant D.

“Lo poco que he aprendido carece de valor, comparado con lo que ignoro y no desespero en aprender” - René Descartes

Auxiliar 4

29 de Septiembre de 2015

1. Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I .
- a) Demuestre que si f es continua en I , derivable en $\text{Int}(I)$ y $\forall x \in \text{Int}(I)$, $|f'(x)| \leq 2$, entonces f es Lipschitziana en I , es decir,

$$\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in I \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

- b) Demuestre que si f es Lipschitziana en I (no necesariamente derivable), entonces f es continua en I .
- c) Demuestre que si f es Lipschitziana en I (no necesariamente derivable), entonces f es uniformemente continua, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I \quad |x_1 - x_2| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

- d) Demuestre que si f es uniformemente continua en I .

2. Considere la función definida por $f(x) = \frac{x}{\ln(x^2)}$. Estudie:

- a) Dominio, paridad y ceros.
- b) Continuidad, reparando donde corresponda y asíntotas.
- c) Cálculo de la derivada en $x \neq 0$ y en $x = 0$ si es posible. Analice crecimientos y puntos críticos.
- d) Cálculo de la segunda derivada. Estudiar concavidad, convexidad e inflexiones.
- e) Gráfico aproximado y recorrido.