

MA1002-2 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Patricio Felmer A.**Auxiliar:** Diego Marchant D.

“En las matemáticas, el arte de proponer una pregunta debe tener un valor más alto que resolverlo” - Georg Cantor

Auxiliar 2 (Extendido)

15 de Septiembre de 2015

- P1) Sean f, g funciones continuas en $[a, b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$.
- a) Demuestre que existe un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = -g(x_0)$.
 - b) Considere $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = (x-b)^n$ con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis (¿Se cumplen para cualquier n ?) y encuentre el x_0 en $[a, b]$
- P2) a) Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$
- i) Probar que $\forall n \geq 1$, g_n tiene una raíz r_n positiva.
 - ii) Demuestre que la sucesión de raíces $(r_n)_n$ tiene una subsucesión convergente.
- b) Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[0, 1]$ tal que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Dado $a \in \mathbb{R}$, se define $g(x) = f(x) + a(1 - 2x)$.
Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, $g(x)$ tiene al menos un cero en $[0, 1]$.
- P3) Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $\bar{x} \in \mathbb{R}$, con $f(\bar{x}) > g(\bar{x})$. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > g(x)$ para todo $x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$. Indicación: Pruebe el caso $g \equiv 0$ y luego concluya.
- P4) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- i) Estudie la continuidad de f en $x \neq 0$ y encuentre el valor de α de modo que f sea continua en $x = 0$.
- ii) Calcule $f'(x) \forall x \in \mathbb{R}$.
- iii) Estudie la continuidad de $f'(x)$ en $\mathbb{R}$.

P5) Sea $c > 1$. Probar que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es derivable en 0 si y solamente si existe el límite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(cx) - f(x)}{x}$$

Notar que $f'(0) = \frac{L}{c-1}$

P6) Sea $h(x) = (f(x))^3$, donde f es una función derivable tal que $f(0) = -\frac{1}{2}$ y $f'(0) = \frac{8}{3}$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $h(x)$ en $x = 0$

P7) Calcular la derivada de las siguiente funciones inversas usando la fórmula de la Derivada de la Función Inversa

a) $f(x) = \ln(x)$

b) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$

c) $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$

d) $f(x) = \operatorname{arccos}(x)$