Universidad de Chile - FCFM
Departamento de Ingeniería Química y Biotecnología
Termodinámica Aplicada - IQ3201

Ejercicio 1

Pregunta 1

Demostrar la siguiente expresión para el trabajo de un proceso adiabático en el caso de un gas ideal entre los estados 1 y 2.

$$W = \bar{c}_v \cdot T_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right], \quad con\, \gamma = \frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_v}$$

Hint: $\bar{c}_p - \bar{c}_v = R$

Solución:

$$W = \int_{v_1}^{v_2} P dv = \int_{v_1}^{v_2} \frac{k}{v^\gamma} dv$$

Donde k es constate. Integrando:

$$W = \frac{k}{1-\gamma}\left(v_2^{1-\gamma} - v_1^{1-\gamma}\right)$$

Como $k = P_1 v_1^\gamma = P_2 v_2^\gamma$:

$$W = \frac{1}{1-\gamma}\left(P_2 v_2 - P_1 v_1\right)$$

Reordenando:

$$W = \frac{P_1 v_1}{1-\gamma}\left(\frac{P_2 v_2}{P_1 v_1} - 1\right)$$

Considerando que:

$$P_1 v_1^\gamma = P_2 v_2^\gamma = k \rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

Reemplazando:

$$W = \frac{P_1 v_1}{1-\gamma}\left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1\right] = \frac{P_1 v_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]$$

Además, $P_1 v_1 = RT_1$

$$W = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right] = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

Finalmente:

$$\frac{R}{\gamma-1} = \frac{\bar{c}_p - \bar{c}_v}{\frac{\bar{c}_p}{\bar{c}_v} - 1} = \frac{\bar{c}_p - \bar{c}_v}{\frac{\bar{c}_p - \bar{c}_v}{\bar{c}_v}} = \bar{c}_v$$

Reemplazando:

$$W = \bar{c}_v \cdot T_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]$$

Pregunta 2

Un mol de gas ideal ($\bar{c}_v = \frac{3}{2}R$) se expande adiabáticamente e irreversiblemente contra una presión de oposición constante e igual a la presión final 7,4 psig. Las condiciones en el estado inicial son: 80°F y 10 psig. Calcular Q, W, U y S. Considere R=1,986 $\left[\frac{BTU}{lbmol\, R}\right]$
Hint:

$$\triangle S = c_v \cdot ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \cdot ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

Solución:
Dado que el proceso es adiabático, Q=0. El trabajo W se obtiene con el primer principio de la termodinámica $\triangle U = Q - W$, luego $W = -\triangle U$.

$$\triangle U = n \cdot c_v \left(T_f - T - i\right) = \frac{3}{2} nR \left(T_f - T_i\right)$$

Además, $W = P_{op} \left(V_f - V_i\right)$, igualando:

$$P_{op} \left(V_f - V_i\right) = \frac{3}{2} nR \left(T_f - T_i\right) \tag{1}$$

Donde V_f y T_f son incognitas, usando gases ideales:

$$P_f V_f = nRT_f \rightarrow V_f = \frac{nRT_f}{P_f} \tag{2}$$

Reemplazando (2) en (1):

$$-P_{op} \left(\frac{nRT_f}{P_f} - V_i\right) = \frac{3}{2} nR \left(T_f - T_i\right) \tag{3}$$

Despejando T_f:

$$T_f = \frac{P_{op} V_i + \frac{3}{2} nRT_i}{\frac{P_{op}}{P_f} nR + \frac{3}{2} nR} \tag{4}$$

El volumen inicial se obtiene a partir de gases ideales.

$$V_i = \frac{nRT_i}{P_i} = \frac{1[lbmol] \cdot 1{,}986 \left[\frac{BTU}{lbmol\, R}\right] \cdot 539{,}7[R]}{24{,}7[psia]} = 43{,}39 \left[\frac{BTU}{psia}\right] \cdot \frac{1}{0{,}185} \left[\frac{psi \cdot ft^3}{BTU}\right] = 234{,}54 \left[ft^3\right]$$

Reemplazando los valores:

$$T_f = \frac{22{,}1[psia] \cdot 234{,}54[ft^3] \cdot 0{,}185 \left[\frac{BTU}{psi \cdot ft^3}\right] + \frac{3}{2} \cdot 1[lbmol] 1{,}986 \left[\frac{BTU}{lbmol\, R}\right] 539{,}7[R]}{\frac{22{,}1[psia]}{22{,}1[psia]} 1[lbmol] 1{,}986 \left[\frac{BTU}{lbmol\, R}\right] + \frac{3}{2} \cdot 1[lbmol] 1{,}986 \left[\frac{BTU}{lbmol\, R}\right]} = 516{,}96 \left[R\right] = 57{,}3 \left[^\circ F\right]$$

$$V_f = \frac{nRT_f}{P_f} = \frac{1[lbmol] \cdot 1{,}986 \left[\frac{BTU}{lbmol\, R}\right] \cdot 516{,}96[R]}{22{,}1[psia]} = 46{,}46 \left[\frac{BTU}{psia}\right] \cdot \frac{1}{0{,}185} \left[\frac{ft^3 \cdot psia}{BTU}\right] = 251{,}11 \left[ft^3\right]$$

Con esto, $\triangle U$ es:

$$\triangle U = nc_v \left(T_2 - T_1\right) = 1[lbmol] \cdot \frac{3}{2} R \left(516{,}96 - 539{,}7\right) \left[R\right] = -67{,}74 \left[BTU\right]$$

Además, $W = -\triangle U = 67{,}74 \left[BTU\right]$. Usando el hint, $\triangle S$ es:

$$\triangle S = 1[lbmol] \left(\frac{3}{2} \cdot 1{,}986 \left[\frac{BTU}{lbmol\, R}\right] \cdot ln \left(\frac{516{,}96[R]}{539{,}7[R]}\right) + 1{,}986 \left[\frac{BTU}{lbmol\, R}\right] \cdot ln \left(\frac{251{,}11[ft^3]}{234{,}54[ft^3]}\right)\right) = 0{,}00733 \left[\frac{BTU}{R}\right]$$