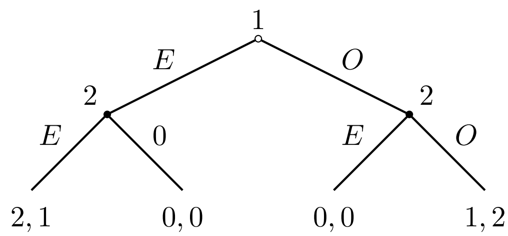
IN3202 Microeconomía — Profesor: J. Escobar
Primavera 2015 — Auxiliares: V. Bustamante, V. Contreras

Guía 2: Juegos de información perfecta e imperfecta, juegos repetidos, y juegos Bayesianos

1. Consider el juego de la batalla de los sexos, pero ahora suponga que jugador 2 mueve después de observar la movida del jugador 1.



   a. Describa el conjunto de estrategias de cada jugador. Escriba la forma normal del juego de informacion perfecta.
   b. Encuentre todos los EN de la forma normal del juego.
   c. Encuentre la solución por inducción reversa. Es decir, encuentre las estrategias asociadas al proceso de inducción reversa.
   d. Coincide el conjunto de EN con la solución por inducción reversa? Explique.

2. Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego del ciempies visto en clases. Coincide con la solución de inducción reversa?

3. Considere el juego de negociación de una sola ronda discutido en clases. Muestre que para todo $\alpha \in [0, 1]$ existe un equilibrio de Nash tal que los pagos de equilibrio son $(\alpha, 1 - \alpha)$. Explique cuales de las estrategias son consistentes con inducción reversa.

4. Considere el juego de la torta. Dos jugadores deciden como repartirse una torta. En el primer periodo, el jugador 1 parte la torta en dos porciones. El jugador 2 observa las dos porciones y escoge como se asignnan (es decir, 2 escoge cual porción come cada uno de los dos jugadores). Cada jugador quiere comer tanta torta como le sea posible.

   a. Modele el juego anterior como un juego de información perfecta.
   b. Encuentre la solución por inducción reversa del juego.
   c. Quien tiene la ventaja en este juego?
   d. Considere una extensión de juego, en el que n jugadores deben repartirse la torta. El jugador 1 parte la torta en n porciones. El jugadore 2 observa las n porciones y escoge una de ellas. El jugador 3 luego observa las $n - 1$ porciones restantes y toma 1. Hasta que el jugador n observa las últimas dos porciones sobre la mesa, escoge una de ellas y le pasa la otra al jugador 1. Cuales son las soluciones del proceso de inducción reversa?

5. Considere el caso de tres primos lejanos (Pedro, Juan y Diego) que deben repartirse una herencia de US$ 1,000,000 de acuerdo a las reglas del testamento. Las reglas son:

   i) Pedro decide cómo se dividen la herencia entre los tres.

   ii) Si Juan y Diego aceptan las partes que les corresponden, esta es la división aceptada.

   iii) Si al menos uno de los dos no acepta, el testamento indica que la mitad de la herencia va a el Hogar de Nios Huérfanos y el resto debe dividirse según un nuevo procedimiento.

iv) Pedro debe dividir la herencia en tres partes.

v) Juan elige la parte que prefiere entre las tres.

vi) Diego elige la parte que prefiere entre las dos que quedan.

vii) Pedro se queda con el resto.

a. Modele la negociación como un juego de información perfecta.

b. Encuentre la solución por inducción reversa del juego.

6. Dos hermanos, Pedro y Juan, negocian la repartición de una herencia de tamaño 1. La negociación dura a lo más 2 rondas. En la primera, Pedro hace una oferta y luego Juan decide si aceptar o no aceptar la oferta. Si la acepta, el juego se acaba y los pagos de cada hermano corresponden a la fracción de la herencia recibida. Si Juan rechaza la oferta, se proceda a la segunda ronda de negociación. Al principio de esta segunda ronda, se decide aleatoriamente quien hace la oferta y quien debe decidir si aceptarla o no. Más concretamente, con probabilidad $\pi > 0$, Pedro hace una oferta y luego Juan decide si aceptar o no; mientras que con probabilidad $(1 - \pi)$ es Juan quien hace la oferta y Pedro decide si la acepta o no (De este modo, si $\pi = 0$ se obtiene el modelo de negociación de dos periodos con oferentes alternantes). Si no hay acuerdo en $t = 2$, los pagos son 0. Suponemos que $\pi \in]0, 1[$ y que los pagos se descuentan a tasa $\delta < 1$.

   a. Describa el conjunto de estrategias para cada jugador.

   b. Encuentre un EPS del juego de negociación. Cuantas rondas dura la negociación? Explique.

   c. Explique como cambian los pagos de equilibrio cuando aumente π. Discuta.

   En lo que sigue del problema, suponga que los hermanos no sólo tienen el conflicto de repartirse la herencia, además tienen distintas visiones del mundo. En particular, los hermanos no están de acuerdo sobre el valor de π. Mientras Pedro cree que π es alto, Juan cree que π es bajo. Sea π^i la probabilidad que el jugador i otorga al evento que Pedro sea quien ofrece en el periodo 2. Suponemos que $\pi^{Pedro} > \pi^{Juan}$. Los hermanos conocen sus diferencias, es decir, los valores π^i son conocimiento común.

   c. Describa el conjunto de estrategias de cada jugador.

   d. Encuentre un EPS del juego. Es posible que en equilibrio la duración de la negociación sea distinta a la encontrado en b? Explique.

7. Considere un juego de negociación entre $n \geq 2$ jugadores. Los n jugadores deben repartirse una herencia igual a 1. La negociación dura por n periodos y los jugadores descuentan el futuro a tasa $\delta < 1$. En la primera ronda, el jugador 1 ofrece una división $s \in \mathbb{R}^n_+$, con $\sum_i s_i = 1$. Si los $n - 1$ jugadores restantes la aceptan, entonces la negociación concluye y la herencia se reparte de acuerdo a la propuesta de 1. Si no, el juego avanza a la segunda ronda de negociación en la que el jugador 2 hace una propuesta que debe ser aceptada por el resto para ser aprobada. Finalmente, en la ronda n, el jugador n hace una propuesta que debe ser aceptada por el resto para ser aprobada. De no ser aceptada la propuesta, la herencia se dona y los jugadores no obtienen nada. Encuentre el EPS del juego.

8. Considere un juego entre dos jugadores jugado en dos etapas. En la primera etapa, el jugador 1 decide una acción en el conjunto $\{E, 0\}$. Los jugadores observan la acción del jugador 1 y, en la etapa 2, juegan el siguiente juego de coordinación:

	E	O
E	$2,2$	$0,0$
O	$0,0$	$1,1$

a. Modele el problema como un juego en forma extensiva.
b. Muestre que el juego tiene 3 subjuegos.
c. Encuentre todos los EPS del juego. Es posible que en equilibrio el jugador 1 juegue acciones distintas en las dos rondas del juego?
d. Suponga ahora que el jugador 1 debe incurrir un costs igual a 1/2 en el periodo 1 si escoge la acción 0. Existe un EPS de la nueva versión del juego donde el jugador 1 juega acciones distintas en los dos periodos?

9. Considere un juego entre una firma incumbente y una entrante. En el periodo t=1, la firma incumbente decide una cantidad $q_1 \geq 0$. En el perido $t = 2$, la firma entrante observa la decisión de la incumbente y decide una cantidad $q_2 \geq 0$. La función de costos de la incumbente toma la forma $c_1(q_1) = 0$, mientras que los costos de la entrante son no convexos de la forma

$$c_2(q_2) = \begin{cases} k & q_2 > 0 \\ 0 & q_2 = 0. \end{cases}$$

El precio de mercado está dado por la demanda inversa $P(q_1 + q_2) = \max\{1 - (q_1 + q_2), 0\}$. Calcule el EPS cuando $k < 1/4$.

10. Sea J un juego en forma normal con un único equilibrio de Nash. Suponga que el juego se repite $T \geq 2$ veces, que los jugadores descuentan pagos futuros a tasa $\delta > 0$, y que los jugadores observan perfectamente las movidas de las rondas previas. Encuentre todos los EPS del juego repetido.

11. Considere dos compañeros de estudio que deciden cuánto esfuerzo hacer $e_i \in [0, 1]$ para resolver una tarea. La funcion de utilidad de cada estudiante i toma la forma $u_i(e_1, e_2) = (e_1 + e_2) - ce_i$ donde $c \in]1, 2[$ es el costo marginal del esfuerzo. El juego se repite infinitamente y los jugadores descuentas pagos a tasa $\delta < 1$.

a. Muestre que si el juego se juega una sola vez, entonces se tiene un único equilibrio de Nash.
b. Muestre que para todo $x \in]0, 1]$, ambos jugadores estrictamente prefieren el perfil de esfuerzos (x, x) al equilibrio de Nash encontrado en a.
c. Encuentre todos los valores de $x \in [0, 1]$ tal que el resultado del juego infinitamente repetido es (x, x) en cada ronda t, cuando los jugadores usan estrategias de gatillo.
d. Considere ahora estrategias de castigo finito e igual a 1. Es decir, considere estrategias en las que cada jugador i juega x en t ssi $t = 1$ o [el resultado de todas las rondas anteriores ha sido (x, x)] o [después de la ultima vez que se jugo $(0, 0)$, el resultado en las rondas siguientes ha sido (x, x)]; en caso contrario el jugador i juega 0. Repita el ejercicio realizado en c, pero usando estrategias de castigo finito. Cuales estrategias hacen más factible la cooperación? Discuta.

12. Considere 3 vecinos que todos los sábados organizan fiestas. Cada uno de los vecinos organiza una fiesta y decide el volumén al que pondrá la música $v_i \geq 0$. La función de utilidad del vecino i es

$$u_i(v_1, v_2, v_3) = (v_i - v_i^2) - (\sum_{k \neq i} v_k)$$

El primer término refleja los beneficios de escuchar música, que se vuelven decrecientes si el volumen excede un cierto valor. El segundo término captura los costos de tener que escuchar la música de los vecinos.

a. Aplique el proceso de eliminacion iterada de estrategias (estrictamente) dominadas.

b. Encuentre todos los EN del juego.

c. Suponga ahora que el juego se repita durante T rondas, con $T \in \mathbb{N}$. (Suponga, por ejemplo, que los vecinos se cambiarán de casa después de T semanas y no se volverán a ver.) Los pagos de cada jugador son la suma de los pagos de cada ronda.

(i) Describa el espacio de estrategias de cada vecino.

(ii) Encuentre todos los EPS.

d. En lo que sigue del problema, suponga que el juego es infinitamente repetido y que los jugadores descuentan pagos a tasa $\delta < 1$. Muestre que si $\delta \geq \frac{1}{4}$ entonces existe un EPS del juego infinitamente repetido tal que el resultado del juego es que en cada ronda los jugadores escogen $v_i = 0$.

13. Pedro y Juan juegan repetidamente el dilema del prisionero siguiente.

	C	D
C	1,1	$-1, 1+g$
D	$1+g$, -1	0,0

donde $g > 0$. El juego se repite infinitamente y el monitoreo es perfecto. Los jugadores no son igualmente pacientes: Pedro es más paciente que Juan. El factor de descuento de Pedro es δ_P mientras que el de Juan es δ_J.

a. Qué restricción sobre δ_P y δ_J capturaría el supuesto de que Pedro es más paciente que Juan? En lo que sigue, asuma esa restricción.

b. Defina una estrategia gatillo para cada jugador. Muestre que la estrategia gatillo es un EPS ssi $\min(\delta_J, \delta_P) > \frac{g}{1+g}$.

c. Explique por qué aun cuando Pedro es extremadamente paciente, es posible que no haya cooperación con estrategias gatillo.

En lo que sigue, suponga que el juego de etapa es ligeramente distinto. En cada etapa, Juan escoge entre C y D (como en el juego de arriba), pero Pedro no solo decide entre C y D si no que tambien decide entre hacer (H) y no hacer (NH) una transferencia igual a $w > 0$ a Juan. El espacio de acciones de Juan es $\{C, D\}$ y el espacio de acciones de Pedro es $\{C, D\} \times \{H, NH\}$. Los pagos son como sigue. Si Pedro escoge NH, entonces la utilidad de cada jugador es como en el dilema del prisionero anterior. Si Pedro escoge H, los pagos son como en el juego de arriba más la transferencia hecha o recibida. Por ejemplo, si el resultado del juego es que Pedro y Juan juegan $((C, H), D)$ (es decir, Pedro juega (C, H) y Juan juega D) , entonces el vector de pagos es $(-1 - w, 1 + g + w)$.

d. Encuentre todas las estrategias estrictamente dominadas del juego descrito. Encuentre todos los ENEM.

e. Defina estrategias gatillos en las cuales en cada etapa del camino del equilibrio se juegue $((C, H), C)$. Muestre que la estrategias gatillo es un EPS ssi $\delta_J \geq \frac{g}{1+w+g}$ y $\delta_P \geq \frac{w+g}{1+g}$.

f. Explique el rol que tiene la transferencia w en sostener la cooperación. En particular, explique por qué, dados los parametros del dilema del prisionero original, w no puede ser muy grande ni muy pequeño.

14. Considere un conjunto $\{1,\dots,N\}$, con $N \geq 3$, de amigos que juegan el siguiente juego de favores. En cada $t \in \{1,\dots,N\}$, el jugador t decide si hacerle o no un favor al jugador $t+1$ (si $t = N$ entonces el jugador N decide si hacerle o no un favor al jugador 1). De este modo, el conjunto de acciones del jugador que mueve en la ronda t es $\{F, NF\}$ (F si hace favor, NF si no lo hace). El costo de hacer el favor es igual a $c > 0$ para el habitante t, pero el habitante $t+1$ (o 1 si $t = N$) que recibe el favor tiene un beneficio igual a $v > 0$. Los amigos descuentan pagos a tasa $\delta < 1$. Por ejemplo, si todos los amigos hacen favores el vector de pagos es

$$(-c + \delta^{N-1}v, (v - \delta c), \delta(v - \delta c), \dots, \delta^{N-2}(v - \delta c))$$

si el jugador 1 es el único que hace el favor el vector de pagos es $(-c, v, 0, \dots, 0)$ y si sólo N hace el favor los pagos son $(\delta^{N-1}v, 0, \dots, 0, -\delta^{N-1}c)$. El juego es de información perfecta. Suponemos que $v - \delta c > 0$.

a. Describa el conjunto de estrategias de cada jugador.
b. Calcule todas las soluciones de inducción reversa.
c. Sea $\sigma = (\sigma_i)_i$ un perfil de estrategias. Defina $h^\sigma \in \{F, NF\}^N$ como la historia que resulta una vez que el juego se ha jugado con los jugadores usando la estretagia σ. Muestre que si σ es un EN, entonces $h^\sigma = (NF, \dots, NF)$.
d. Sólo en esta parte, suponga que $N = 3$. Muestre que existe un EN que no es EPS.
e. Suponga ahora que el juego es infinitamente repetido de modo que en cada $t \geq 1$ de la forma $t = nN + m$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $m = m(t) \in \{1, \dots N\}$, el jugador m decide si hacerle o no un favor al jugador $m+1$ (si $m = N$ el favor se lo hace al jugador 1). Muestre que si

$$(v - \delta c)\frac{\delta^N}{1 - \delta^N} \geq \delta c$$

entonces existe un EPS del juego en el que en cada ronda t el resultado es que el jugador $m(t)$ hace el favor. Explique cuidadosamente las estrategias de equilibrio y verifique los incentivos después de cada posible historia. En particular, detalle el trade off que enfrenta cada jugador al momento de decidir si hace o no un favor.
f. Explique por qué es más difícil que haya cooperación cuando N crece.

15. Alberto y Bernardo deben escoger simultáneamente dos contribuciones $a \in [0,1]$ y $b \in [0,1]$ respectivamente, y sus utilidades son $u_A = 2b - a$ y $u_B = 2a - b$

a. Encuentre el equilibrio de Nash del juego estático.
b. Considere ahora el juego infinitamente repetido en $t = 0, 1, \dots$ del juego de etapa anterior con un factor de descuento $\delta \in (1/2, 1)$. Muestre que un par (a^*, b^*) se puede sostener como un resultado de EPS si

$$\min\{a^*, b^*\} \geq \frac{1}{2\delta}\max\{a^*, b^*\}$$

c. Suponga ahora que Alberto y Bernardo pueden firmar un contrato en cada periodo t. Un contrato es un par $(a, b) \in [0,1]^2$ que de ser firmado en el periodo t, obliga tanto a Alberto como a Bernardo a contribuir a y b (respectivamente), en la ronda t y en todas las rondas que siguen. El protocolo es como sigue. Si t es par (resp. impar), Alberto (resp. Bernardo) ofrece un contrato (a^t, b^t), que Bernardo (resp. Alberto) puede aceptar o rechazar. Si acepta, entonces el contrato se ejecuta (en t y todos los periodos que siguen), mientras que si rechaza juegan el EN de etapa (encontrado en a) y el juego se mueve a $t+1$. Muestre que existe un EPS con las siguientes caracteristicas:

i. En periodos pares, Alberto ofrece un contrato $(a_A, 1)$, con a_A por determinar

ii. En periodos impares, Bernardo ofrece un contrato $(1, b_B)$, con $b_B = a_A$

iii. En el camino del equilibrio, el contrato se acepta en el periodo $t = 0$.

16. Considere dos firmas que en cada $t \geq 1$ fijan precios $p_i^t \geq 0$ simultáneamente. La competencia es Bertrand con una demanda en t igual a $Q_t \geq 0$ si el precio es menor o igual a 1, e igual a 0 si el precio excede 1. El tamaño de mercado Q_t varia periodo a periodo, de modo que cuando t es par $Q_t = H$ mientras que cuando t es impar $Q_t = L$, con $L < H$. Las firmas tienen costos marginales constantes e iguales a $c < 1$ y descuentas utilidades a tasa $\delta < 1$.

    a. Calcule todos los EN del juego estático. En que sentido su respuesta se parece a la competencia perfecta?

    b. Define las estrategias de gatillo que sostienen el precio monopólico en el camino del equilibrio.

    c. Derive las condiciones necesarias y suficientes que hacen que las estrategias de gatillo sean EPS.

    d. Suponga que la condición necesaria y suficiente encontrada en la parte c no se satisface. Encuentre condiciones necesarias y suficientes para que las estrategias de gatillo sean un EN.

    d. Es más facil sostener la colusión cuando el tamaño del mercado es alto o bajo? Cualquiera sea su respuesta, explique el resultado en detalle.

17. Considere un juego Bayesiano entre dos jugadores. Hay dos estados posibles $s = 1, 2$ y el jugador 1 conoce s. El jugador 2 no conoce s, pero sabe que ambos estados son igualmente probables. Cada jugador tiene dos acciones. Si $s = 1$ los pagos como se muestra en la figura.

	E	O
E	$1, 1$	$0, 0$
O	$0, 0$	$0, 0$

mientras que si $s = 2$ los pagos son

	E	O
E	$0, 0$	$0, 0$
O	$0, 0$	$2, 2$

Encuentre todos los equilibrios Bayesianos del juego.

18. Considere un modelo de Cournot de dos firmas con demanda $P(Q) = a - bQ$. Suponga que cada firma tiene una probabilidad μ de tener costos marginales iguales a c y una probabilidad $(1 - \mu)$ de tener costos d, con $d > c$. Cada firma conoce sus costos, pero no los costos del rival. Encuentre un equilibrio Bayesiano simétrico del juego.

19. $n \geq 2$ jugadores participan en una licitación primer precio. Las valoraciones son realizadas de acuerdo a una distribución uniforme en $[0, \bar{v}]$, con $\bar{v} > 0$. Cada jugador conoce su valoración pero no la de sus rivales. Encuentre un equilibrio Bayesiano simétrico del juego. Discuta cómo cambia el equilibrio cuando $n \to \infty$.

20. Dos firmas se encuentran compitiendo en un mercado que se ha vuelto demasiado pequeño. Las firmas deciden simultaneamente si abandonar (A) o no (NA) el mercado. Si una firma abandona el mercado, entonces obtiene un pago igual a 0 independiente de lo que haga su rival. Si ninguna abandona entonces, dado que el mercado es muy chico, las firmas tienen pérdidas de modo que el pago de cada una es igual a $-c$, con $c > 0$. Si sólo una decide no abandonar, entonces esa firma se convierte en monopolio y obtiene utilidades $\pi > 0$.

a. Dibuje la matriz de pagos del juego y encuentre todos los EN del juego.

b. Suponga que una de las firmas juega una estrategia en que abandona con probabilidad p y no abandonda con probabilidad $1-p$, donde $p \in [0,1]$. Encuentre la mejor respuesta de la firma rival. Encuentre todos los ENEM del juego.

c. Explique cómo cambia el ENEM (no degenerado) cuando suben las utilidades monopólicas π.

d. Suponga ahora que una de las firmas, la firma 1, obtiene un beneficio ligeramente mayor de modo que si resulta ser el monopolio sus utilidades son $\Pi > \pi$. Todos los otros paramétros del juego permanecen inalterados. Sin hacer cálculos, explique por qué en el nuevo equilibrio la firma 1 jugará abandonar o no abandonar con las mismas probababilidades que las encontradas en b. En particular, contraste su respuesta con la estática comparativa realizada en c.

e. Considere una variación del juego, en la que cada firma i conoce sus utilidades π_i si obtiene el monopolio, pero no conoce las utilidades monopólicas del rival. Desde la perspectiva de la firma i, las utilidades monopólicas de la firma $-i$ se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0,1]$.

   (i) Describa el espacio de estrategias para la firma i.

   (ii) Suponga que la firma $-i$ abandonda ssi $\pi_{-i} < x$, donde x es un parámetro que debe ser determinado. Calcule el pago esperado de la firma i que conoce su tipo π_i y conoce la *estrategia* de la firma $-i$.

   (iii) Encuentre un equilibrio Bayesiano del juego.

21. Usted sabe que su rival tiene en su bolsillo un monto de dinero entre 0 y mil pesos, pero sólo su rival conoce el monto exacto. Sus estimaciones le indican que todos los montos en el conjunto $\{0, 1, ..., 1000\}$ tienen probabilidad positiva, pero los montos altos parecen mucho más probables. Su rival cree que usted tiene en su bolsillo un monto de dinero entre 0 y mil pesos, pero usted sabe que en su propio bolsilo sólo hay 100 pesos. Su rival le ofrece intercambiar los montos, de modo que si usted acepta perderá los 100 pesos y se quedará con el monto de dinero que su rival tiene en su bolsillo.

   a. Un muy buen amigo le sugiere que acepte, pues la cantidad que su rival tiene en su bolsilo es muy probablemente alta y usted solo tiene 100 pesos. Seguirá el consejo de su amigo? Explique.

   b. Modele la situación descrita como un juego Bayesiano y encuentre un EB simétrico del juego.