IN3202 Microeconomía
Primavera 2015

Profesor: J. Escobar
Auxiliares: V. Bustamante, V. Contreras

Guía 1: Juegos en forma normal [1]

1. Considere el siguiente juego

	L	C	R
T	$2, 0$	$1, 1$	4,2
M	3,4	1,2	2,3
B	1,3	0,2	3,0

   a. Encuentre las estrategias que sobreviven la eliminación iterada de estrategias estricamente dominadas.
   b. Encuentre los equilibrios de Nash de este juego.

2. Considere el juego representado por la siguiente matriz de pagos:

	D	C
D	$L, 1$	$0, 0$
C	$0, 0$	$1, L$

   donde $L > 1$.

   a. Aplique el procedimiento de eliminación iterada de estrategias dominadas.
   b. Encuentre todos los equilibrios de Nash (en estrategias puras).
   c. Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

3. Dos candidato compiten en una elección escogiendo posiciones políticas $s_i \in \{-K, \cdots -1, 0, 1, \ldots, K\}$, donde $K > 1$. En cada una de las $2K+1$ posibles posturas políticas hay una fracción $\frac{1}{2K+1}$ de votantes. Cada votante vota por el candidato con una postura más cercana a la propia. En caso de indiferencia, los votantes se reparten en partes iguales entre los dos candidatos. La utilidad de cada candidato está dada por la fracción de votos obtenida en la elección.

   a. Encuentre las estrategias estrictamente dominadas del juego.
   b. Tiene el juego solución por eliminación iterada de estrategias dominadas?
   c. Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego.

4. Encuentre todos los ENEM del dilema del prisionero.

5. Usando las propiedades vistas en clases, muestre que si un juego tiene solución de eliminación iterada de estretegias dominadas entonces tiene un único equilibrio de Nash.

[1] Se recomiendan además los problemas del capítulo 1 de libro de Gibbons

6. Cada sábado, Pedro, Juan y Diego deciden simultáneamente si marchar (M) o no marchar (NM). No marchar tiene un pago seguro e igual a 0. Marchar tiene un costo $c > 0$ para cada jugador y beneficios que se describen como sigue. Pedro realmente goza el salir a la calle, por lo que si decide marchar su beneficio es igual a V, con $V > c$ (de modo que si marcha obtiene $V - c$ independiente de la acción de sus rivales). Juan disfruta marchar, pero odia marchar solo. Más especifícamente, si Juan marcha y nadie más marcha su utilidad es $-c$, mientras que si marcha y al menos alguien más marcha su pago es $V - c$. Diego disfruta las marchas, pero solo si todos están marchando. Su utilidad es $-c$ si marcha y alguien no marcha y es $V - c$ si todos marchan.

   a. Encuentre las estrategias estrictamente dominadas para cada jugador.
   b. Tiene el juego solución de eliminación iterada de estrategias dominadas? Fundamente su respuesta.
   c. Encuentre todos los EN (en puras) del juego.
   d. Explique las similitudes y diferencias entre este juego y el juego de coordinación discutido en clases.
   e. Cuales son las utilidades en el EN encontrado en c? Es el resultado encontrado en c. socialmente atractivo? Explique.
   f. Tiene el juego ENEM (distintos de lo encontrado en c.)?

7. Use sus conocimientos de teoría de juegos y no más de 4 lineas para responder las siguientes preguntas.

   a. Considere un juego en forma normal con un conjunto finito de acciones S_i para cada i. Sea $s \in S$ un EN. Es posible que exista un jugador i y una acciń $s'_i \in S_i$ tal que $u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s'_i, s_{-i})$? Fundamente su respuesta.
   b. Considere un juego en forma normal con con un número finito de acciones para cada jugador y funciones de utilidad $u_i \colon A \to \mathbb{R}$ para cada i. Sea σ un ENEM y sea a_i una acción para el jugador i tal que $\sigma_i(a_i) = 0$. Podemos concluir que

   $$a_i \notin \arg\max_{b_i \in A_i} u_i(a_i, \sigma_{-i})?$$

   Si su respuesta es afirmativa, demuéstrelo. Si su respuesta es negativa, provea un contraejemplo. En cualquier caso, explique la intuición detrás del resultado.

8. Considere I granjeros, cada uno de los cuales tiene el derecho a usar un prado (de propiedad común) para alimentar a sus vacas. La cantidad de leche que cada vaca produce depende del número total de vacas, N, pastando en el prado. Así, n_i vacas producen un ingreso $n_i v(N)$, donde $v(N) = 0$ si $N \geq \bar{N}$, $v(0) > 0, v'(0) < 0$ y $v'' < 0$. Cada vaca cuesta c,

con $0 \leq c < v(0)$. Los granjeros simultáneamente deciden la cantidad de vacas compradas. Suponga que las vacas son perfectamente divisibles.

a. Describa la forma normal del juego entre granjeros.

b. Explique el tradeoff que resuelve cada granjero cuando toma su decisión. Encuentre el equilibrio de Nash.

c. Encuentre la cantidad de vacas que maximizan la suma de las utilidades de los granjeros. Cómo se compara este resultado con el encontrado en b? Discuta.

d. Discuta la relación entre este juego y el modelo de Cournot.

9. Considere un modelo de Cournot en el que dos firmas escogen simultáneamente cantidades $q_i \geq 0$. La demanda (inversa) viene dada por $P = a - b(q_1 + q_2)$, donde $a, b > 0$. Las firmas tienen tecnologías con retornos constantes a escala,y sus funciones de costo son $c_1 q_1$ y $c_2 q_2$, respectivamente, con $c_1 \geq c_2 \geq 0$. Suponemos que $a > c_1$.

   a. Encuentre la función de reacción de cada una de las firmas.

   b. Encuentre el equilibrio de Nash del juego de Cournot y calcule las utilidades de cada una de las firmas.

   c. Calcule el equilibrio bajo competencia perfecta y compárelo con el equilibrio encontrado en b. En particular, compare y discuta los precios, volumenes de venta, y pérdidades de bienestas social.

   d. Suponga que $c_1 = c_2$. Las firmas pueden escribir un contrato que especifíca cuánto produce cada una y determina penalidades extremadamente severas si las cantidades acordadas no se respetan. Qué contrato escribirían las firmas? Cómo se comparan las utilidades que alcanzan las firmas bajo este contrato con las utilidades encontradas en b? Por qué no se observan estos contratos en la realidad?

10. Describa las condiciones bajo las cuales un equilibrio de Nash puede ser dominado socialmente (Pareto dominado) por algún otro perfil de acciones (que puede o no ser un equilibrio de Nash). Ejemplifique.

11. Considere dos estudiantes que comparten sala de estudio y deben decidir el esfuerzo en mantener la sala limpia. Los estudiantes escogen esfuerzos $e_1, e_2 \geq 0$ simultáneamente y obtienen beneficios por la limpieza de la sala pero también deben asumir los costos de la limpieza. El jugador 1 tiene pagos $u_1(e) = k \log(e_1 + e_2) - e_1$ mientras que los pagos de 2 son $u_2(e) = \log(e_1 + e_2) - e_2$. Suponemos que $k > 1$ de modo tal que 1 valora marginalmente más la limpieza de la sala de estudio.

    a. Grafique las funciones de mejor respuesta de cada jugador.

    b. Encuentre el equilibrio de Nash del juego y discuta la relación entre la heterogeneidad en los pagos y los esfuerzos de equilibrio.

c. Ilustre como cambia el equilibrio de Nash cuando k aumenta.

12. Dos jugadores, 1 y 2, negocian sobre como repartirse 10 (millones de pesos). Cada jugador i escoge una cantidad $s_i \in [0, 10]$. Las decisiones son simultáneas. Si $s_1 + s_2 \leq 10$, entonces cada jugador i obtiene s_i (lo que sobra, se destruye). Si $s_1 + s_2 > 10$ entonces ambos jugadores obtienen 0 y el dinero es destruido. La función de utilidad de cada jugador es igual al dinero recibido por el jugador. Encuentre todos los equilibrios de Nash de este juego.

13. Cada uno de n jugadores escribe en un sobre cerrado una cantidad $s_i \in [0, 100]$, $i = 1, \ldots, n$. Una vez que los sobres son abiertos , se calcula $\alpha = \frac{2}{3n} \sum_{i=1}^{n} s_i$. El jugador cuya cantidad s_i este más cerca de α recibe un premio de 1 millón de pesos. Los otros no reciben nada. En caso de empate, se escoge un ganador aleatoriamente.

    a. Muestre que $s^* = (0, \ldots, 0)$ es un equilibrio de Nash.

    b. Muestre que existe un único equilibrio de Nash.

    c. Bajo que condiciones es esperable que el equilibrio de Nash emerja como resultado de este juego en la realidad?

14. Dos estudiantes deciden simultáneamente cuánto estudiar $e_i \in [0, 1]$. Las funciones de utilidad de los estudiantes son

$$u_1(e) = \ln(1 + 3e_1 - e_2) - e_1, \; u_2(e) = \ln(1 + 3e_2 - e_1) - e_2.$$

    El término negativo de la utilidad de 1 refleja el costo de oportunidad del tiempo dedicado al estudio, mientras que el término positivo refleja los beneficios de estudiar sobre la nota considerando que mientras más estudie el otro estudiante menor será la nota propia (asumiendo que la escala de notas se ajusta).

    a. Encuentre la función de mejor respuesta del jugador 1. Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego.

    b. Sea $e = (1/2, 1/2)$. Muestre que cada uno de los jugadores prefiere el perfil e por sobre el perfil encontrado en a. Explique por qué los jugadores están mejor esforzandose menos que en el equilibrio de Nash. Discuta además por qué el perfil $(1/2, 1/2)$ no es sostenible en un equilibrio de Nash.

    c. Suponga ahora que el costo de oportunidad del tiempo del jugador 1 es más alto, de modo que su función de utilidad es

$$v_1(e) = \ln(1 + 3e_1 - e_2) - (1 + \alpha)e_1$$

    donde $\alpha > 0$. La función de utilidad del jugador 2 no cambia. Grafique las nuevas funciones de mejor respuesta y explique, sin hacer cálculos, cómo se compara el nuevo equilibrio de Nash con la solución encontrada en a. Discuta.

15. Un inversor valora la riqueza de acuerdo a una función de utilidad $u(x) = \sqrt{x}$, donde $x \geq 0$ es su riqueza. Su riqueza, sin embargo, es una variable aleatoria que puede ser el resultado de dos estrategias de inversión distinta. Por un lado, el inversor puede obtener un ingreso seguro de 100 millones de pesos si compra bonos del banco central. Una segunda alternativa de inversión es comprar acciones en la bolsa. Suponga que si compra acciones, entonces su riqueza puede ser igual a 0 con probabilidad 1/2 y a 200 millones de pesos con probabilidad 1/2. Es decir, invertir en la bolsa resulta en el mismo retorno esperado que invertir en un bono, pero el bono da un pago seguro. Muestre que si el inversor maximiza su utilidad esperada, entonces preferirá invertir en el bono.

16. Dos empresas, 1 y 2, ofrecen cada una un puesto de trabajo en el que pagan, respectivamente, w_1 y w_2, con $\frac{w_1}{2} < w_2 < 2w_1$. Existen dos trabajadores, quienes pueden postular sólo a una empresa. Ambos postulantes eligen simultáneamente a que empresa postular. Si postulan a la misma empresa, ambos obtienen trabajo con probabilidad $\frac{1}{2}$; si los dos postulan a distintas empresas, ambos obtienen trabajo. Represente el juego en forma normal y luego encuentre el equilibrio en estrategias mixtas.

17. Considere el juego de la inspección, en el que un trabajador puede elegir entre trabajar (T) y no hacerlo (NT). El costo de trabajar es $g = 2$ para el trabajador. Si el trabajador trabaja se produce un bien que tiene valor $v = 4$ para el empleador, mientras que si el trabajador no trabaja no produce nada. El empleador puede realizar una inspección (I) o no hacerlo (NI). El costo de la inspección es $h = 1$ y determina cuanto se le paga al trabajador. El empleador le paga un salario $w = 3$ al trabajador, a menos que tenga evidencia (mediante una inspeccion) de que el trabajado no trabajo en cuyo caso lo despide y le paga 0.

    a. Encuentre la forma normal del juego.
    b. Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego.
    c. Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.
    d. Suponga ahora que $v = 6$. Cómo cambian los equilibrios (en estrategias puras y mixtas)?

18. Modele el juego del cachipún suponiendo que el que pierde debe pagar k pesos al que gana y que los jugadores maximizan su ingreso. Muestre que el juego no tiene equilibrio de Nash y encuentre un equilibrio de Nash en estrategias mixtas. Depende su solución de k? Explique.

19. Considere un juego en el que dos jugadores escogen un número en $\{1, \ldots, K\}$. Si los números coinciden, entonces el jugador 2 le paga a 1 un monto igual l; si no, no se realiza pago alguno. Encuentre un ENEM.

20. Considere un juego entre n agentes que deben decidir si contribuir (C) o no (NC) a la provisión de un bien público. Si el agente i cotribuye al

bien público, entonces incurre un costo $c > 0$. Para que el bien publico se provea se requiere que al menos un agente contribuya al bien público. SI el bien público se provee, cada uno de los agentes disfruta de una utilidad igual a 1.

a. Muestre que si $c > 1$, entonces existe un único equilibrio de Nash.

b. Muestre que si $c < 1$, entonces existen n equilibrios de Nash.

c. Encuentre un equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico suponiendo $c < 1$. Cómo cambia el equilibrio cuando c crece o cuado n crece? Explique.

d. Discuta las propiedades de eficiencia de cada equilibrio encontrado.

e. Suponga ahora que para que el bien público se provea es necesario que al menos dos personas contribuyan. Como cambian los equilibrios? Explique.

21. Cada sábado, Pedro, Juan y Diego deciden simultáneamente si ir al club a jugar tenis (C) o quedarse durmiendo (D). Quedarse durmiendo da un pago seguro e igual a 0. Ir al club de tenis tiene un costo igual a $c > 0$. Los beneficios de jugar un partido de tenis son iguales a 1. Si un solo jugador va al club, entonces no puede jugar y su pago es igual a $-c$. Si sólo dos jugadores van al club de tenis, entonces cada uno tendrá un pago igual a $1 - c$. Si los tres jugadores van al club, entonces se decide aleatoriamente quienes jugarán de modo que el pago de cada uno de los tres jugadores es $\frac{2}{3} - c$.

    a. Muestre que si $c > 1$, entonces cada jugador tiene una estrategía estrictamente dominada.

    b. Suponga ahora que $c \in]2/3, 1[$. Muestre que en cualquier equilibrio de Nash, el número de jugadores que va al club es igual a 0 ó 2. Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego.

    c. Suponga que $c = 3/4$. Encuentre un equilibrio de Nash en estrategias mixtas simétrico.

22. $n \geq 2$ alumnos de ingeniería industrial postulan simultáneamente a prácticas de verano. Hay $M \leq n$ posibles empresas donde postular y cada empresa necesita solo un alumno. Si dos o más alumnos postulan a la empresa m, entonces la empresa decidirá aleatoriamente entre los postulantes al alumno que obtiene la práctica en esa empresa. Cada alumno puede postular a una sola empresa, de modo que una estrategia para el alumno i es $s_i \in \{1, \ldots, M\}$. La utilidad del jugador i es igual a la probabilidad de obtener una práctica

$$u_i(s) = \frac{1}{|\{j \in \{1, \ldots, n\} \mid s_j = s_i\}|}.$$

a. Encuentre las estrategias que sobreviven la eliminacion iterada de estrategias estrictamente dominadas.

b. Muestre que si $s^* \in S$ es un EN (en puras), entonces la cantidad de postulantes a la empresa m difiere de la cantidad de postulantes a la empresa $\bar{m}$ en, a lo más, 1. Es decir, si

$$|\{i \mid s_i^* = m\}| \geq |\{i \mid s_i^* = \bar{m}\}|$$

entonces $|\{i \mid s_i^* = m\}| = |\{i \mid s_i^* = \bar{m}\}| + 1$.

c. Muestre que la condición necesaria encontrada en b es también suficiente. Muestre el conjunto de EN cuando $M = n$.

d. Encuentre un ENEM (que no sea en puras).

e. Suponga que $n = 2$ y $M = 2$. Encuentre todos las estrategias evolutivamente estables (en puras y mixtas).

23. Consider el juego de coordinación discutido en clases.

	E	O
E	$2,2$	$0,0$
O	$0,0$	$1,1$

Encuentre todas las estrategias evolutivamente estables. Describa situaciones en ciencias sociales que están modeladas por este juego.

24. Considere un juego en forma normal simétrico entre dos jugadores.

a. Suponga que el juego posee un EN (s, s) que es estricto. Muestre que el juego posee estrategias evolutivamente estables.

b. Es posible que el juego no posea estrategias evolutivamente estables? Cambia su respuesta si considera estrategias mixtas?