Mecánica Estadística

Tarea 7 — Entrega 6 de noviembre de 2015

Profesor: Rodrigo Soto

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

[P1] Gas ultrarelativista. Considere un gas ideal ultrarelativista con hamiltoniano

$$H = \sum_{i=1}^{N} c|\vec{p}_i|$$

donde las partículas tienen estadística de fermiones o de bosones.

(a) Determine los estados cuánticos de 1 partícula en una caja periódica de largo L, indicando sus energías ε.

(b) Obtenga la densidad de estados $g(\varepsilon)$ definida de manera que el número de estados entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$ es $Vg(\varepsilon)d\varepsilon$. Considere que las partículas tienen spin s.

(c) Encuentre expresiones genéricas para el número de partículas N, energía E y presión p en términos de la temperatura T y fugacidad z. Muestre que la presión y la energía están relacionados de manera simple.

[P2] Gas no relativista débilmente cuántico. En el caso de un gas ideal de partículas no relativistas de spin s, se obtuvieron las relaciones

$$n = g_0(k_B T)^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}\, dx}{z^{-1}e^x \pm 1}$$

$$p = \frac{2}{3} g_0(k_B T)^{5/2} \int_0^\infty \frac{x^{3/2}\, dx}{z^{-1}e^x \pm 1}$$

El límite clásico se obtiene para $z \to 0$. Para estudiar los primeros efectos cuánticos, considere que $z \ll 1$.

(a) Desarrolle hasta orden z^2 (dos términos), las expresiones de la densidad y presión. Calcule explícitamente las integrales.

(b) Invierta la relación $n = n(z)$ hasta el mismo orden de manera de obtener $z = z_1 n + z_2 n^2$.

(c) Reemplace en la presión para obtener hasta el mismo orden una expresión del tipo $p = p_1 n + p_2 n^2$. Muestre que $p_{\text{boson}} < p_{\text{boltzmann}} < p_{\text{fermion}}$.

[P3] Condiciones de borde rígidas. En clase se calculó la densidad de estados de un gas no relativista usando condiciones de borde periódicas. Se busca que uds muestren que en el límite termodinámico, si se hubieran usado condiciones de borde rígidas, se obtiene la misma densidad de estados.

(a) Determine los estados cuánticos de 1 partícula en una caja con bordes rígidos de largo L. Dé los valores de las energías ε de los estados rotulados por los índices $\vec{n}$.

(b) Notando que en este caso $\vec{n} \in \mathbb{N}^3$, donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, obtenga la densidad de estados $g(\varepsilon)$. Muestre que es idéntica a la obtenida con condiciones de borde periódicas.

[P4] Aniones. Lea y comente (en media página) el artículo “Bosons Condense and Fermions Exclude, But Anyons...?” de Anil Khurana, Phys. Today **42**, 17 (1989), que puede bajar de UCursos.