Mecánica Estadística

Tarea 6 — Entrega 30 de octubre de 2015

Profesor: Rodrigo Soto

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

[P1] Entropía. El logaritmo de un operador se define como aquel operador que exponenciado da lugar al operador orignal. Así, $B = \log A$ si $e^B = A$, donde la exponencial se define por su serie de potencias. El logaritmo de un operador no siempre existe, ni es necesariamente único.

(a) Muestre que si A es diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$, entonces $\log A = PdP^{-1}$ donde d es diagonal con $d_{ii} = \log D_{ii}$.

(b) Muestre que si ρ es la matriz densidad, $\mathrm{Tr}(\rho \log \rho) = \sum p_i \log p_i$, con p_i los valores propios de ρ, de manera que entonces se puede escribir $S = -k_B \mathrm{Tr}(\rho \log \rho)$.

[P2] Teoría de perturbaciones.

(a) Considere un oscilador armónico cuántico que es perturbado con un potencial de cuarto orden

$$H = H_0 + V$$
$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} = \hbar\omega(aa^\dagger + 1/2)$$
$$V = \lambda x^4,$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ y λ es pequeño.

Calcule a primer orden en λ la energía promedio del oscilador que está a una temperatura T.

Nota: Para el cálculo conviene usar la representación en a y $a^\dagger$ de x. Para el cálculo de la energía promedio conviene usar la relación

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z$$

(b) Encuentre una expresión para el valor medio de un observable A a primer orden en teoría de perturbaciones cuando $H = H_0 + V$.

[P3] Ecuación de Lindblad. La ecuación de von Neumann para la matriz densidad describe la evolución de un sistema cerrado que evoluciona con su propio hamiltoniano. Esta evolución entonces no puede describir el acoplamiento del sistema con un baño que le permita llegar al equilibrio. Cualquier ecuación que se proponga para describir el acoplamiento con un baño debe cumplir las siguientes propiedades:

- Mantener la hermiticidad de ρ
- Mantener la traza igual a 1
- Mantener la semi-positividad

Muestre que la ecuación de Lindblad satisface dichas propiedades

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H,\rho] + \left(L\rho L^\dagger - \frac{1}{2}\left(\rho L^\dagger L + L^\dagger L \rho\right)\right)$$

donde L es un operador de acoplamiento con el baño.

[P4] Coherencia cuántica. Lea y comente (en media página) el artículo "Decoherence and the transition from quantum to classical" de Wojciech H. Zurek, Phys. Today **44**, 36 (1991), que puede bajar de UCursos.