

Mecánica Estadística

Tarea 2 — Entrega 25 de septiembre de 2015

Profesor: Rodrigo Soto

Departamento de Física, Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas, Universidad de Chile

[P1] Ausencia de correlaciones en un gas ideal. Considere un gas ideal clásico en el ensemble microcanónico. Calcule la densidad de probabilidad conjunta $P^{(2)}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ de que una partícula tenga velocidad $\vec{v}_1$ y otra $\vec{v}_2$. Muestre que en el límite termodinámico

$$P^{(2)}(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = P(\vec{v}_1)P(\vec{v}_2)$$

donde P es la distribución de Maxwell–Boltzmann vista en clases. Es decir, la probabilidad se factoriza, mostrando que no hay correlaciones.

[P2] Fluctuaciones en un gas ideal. Considere un gas de N partículas puntuales no interactuantes en una caja de volumen V . La caja se subdivide en M subvolúmenes idénticos (celdas), con la condición $1 \ll M \ll N$. Este tipo de división se llama de *coarse grained* o de granulado grueso, donde cada subvolumen es, a la vez, suficientemente chico de manera de ser homogéneo y suficientemente grande de manera de ser termodinámico.

- (a) Considere el estado micro Ψ que indica la celda en la que se encuentra cada partícula: $\Psi = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, con $x_i = 1, \dots, M$. Calcule la probabilidad de cada estado.
- (b) Considere ahora la descripción macro $\tilde{\Psi}$ que indica el número de partículas en cada celda: $\tilde{\Psi} = \{n_1, n_2, \dots, n_M\}$. Calcule la probabilidad de cada estado.
- (c) Muestre que el estado macroscópico de máxima probabilidad es el estado homogéneo.
- (d) Calcule la entropía del sistema para cada estado macro. En el límite de muchas celdas, la fórmula para la entropía puede ser escrita como una integral de la densidad de partículas: $S = S[n(\vec{r})]$. Explíctela.

- (e) Considere un estado macro caracterizado por la presencia de una onda de densidad: $n(x) = n_0 + n_1 \cos(2\pi x/L)$, con $n_1 \ll n_0$. Justifique que la densidad de probabilidad $p(n_1)$ puede ser calculada como la exponencial de la entropía $p(n_1) \sim \exp(-S[n(\vec{r})]/k_B)$. Evalúe esta probabilidad.

Nota: Puede ser útil usar la aproximación $\log N! \approx N \log N - N$.

[P3] Temperaturas negativas. Cuando la energía de un sistema tiene una cota superior, es posible que aparezcan temperaturas negativas. Considere un sistema de N spins $1/2$ en un campo magnético externo $\vec{B} = B\hat{z}$. La energía del sistema es

$$H = -\mu \sum_i B s_{i,z}$$

donde μ es la constante de acoplamiento. La energía es discreta con intervalos μB que, en el límite termodinámico, se pueden considerar pequeños respecto a las energías máximas y mínimas $\pm N\mu B/2$.

Para cada valor posible de la energía calcule la entropía del sistema. Luego calcule la temperatura $T^{-1} = \frac{\partial S}{\partial E}$ usando que las energías son *cuasicontínuas*. Muestre que pueden ser positivas o negativas.

[P4] Entropía de Boltzmann. Lea y comente (en media página) el artículo “Boltzmann’s Entropy and Time’s Arrow” de Joel L. Lebowitz, Phys. Today **46**, 32 (1993), que puede bajar de UCursos. En UCursos están también las cartas de respuesta; sólo si quiere mirarlás.