

Quiz 13

Intro:

Ec. de

Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

• En el vacío: $\rho = 0$, $\vec{J} = \vec{0}$

con $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$\nabla \times (2) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}} \quad (5)$$

ec. de onda

$$\nabla \times (4) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \epsilon_0 \nabla \times \vec{E})$$

$$\Rightarrow \nabla (\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}} \quad (6)$$

• Resolución $\rightarrow$ variables separables. (5) y (6) son en total 6 ecuaciones de la

forma:

$$\nabla^2 F = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad \text{con } F = \{E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z\}$$

$\nwarrow$ función de una variable.

• Ansatz: $F(x, y, z, t) = X(x) Y(y) Z(z) T(t)$

• Reemplazando en la ec. de onda:

$$\Rightarrow X'' Y Z T + X Y'' Z T + X Y Z'' T = X Y Z T'' \frac{1}{c^2} \quad \bigg/ \frac{1}{X Y Z T}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{-k_x^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-k_y^2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{-k_z^2} = \frac{1}{c^2} \underbrace{\frac{T''}{T}}_{-\omega^2}$$

$\nwarrow$ funciones de una variable separables $\Rightarrow$ deben ser constantes!

[1]

• se llega a: $X'' + k_x^2 X = 0 \rightarrow X(x) = e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}$

$Y'' + k_y^2 Y = 0 \rightarrow Y(y) = e^{ik_y y} + e^{-ik_y y}$

$Z'' + k_z^2 Z = 0 \rightarrow Z(z) = e^{ik_z z} + e^{-ik_z z}$

$T'' + \omega^2 T = 0 \rightarrow T(t) = e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}$

• y se cumple: $\underbrace{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}_{k^2} = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow ck = \omega$

• Hasta aquí llega la solución matemática...

• Solución física: ondas que viajan en una dirección: $F = f(\omega t - k \cdot \vec{r})$

$\Rightarrow$ nos quedamos con las soluciones "-" en el espacio y con la solución "+" en el tiempo: (convención)

$$F = F_0 X Y Z T = F_0 e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} e^{i\omega t} = F_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$\swarrow$ amplitud inicial $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

• Esto debe cumplirse para los 6 es. que representan F :

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{aligned}} \quad (7)$$

• Las amplitudes $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$ se relacionan a través de las ec. de Maxwell:

$$(2) \Rightarrow \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow e^{i\omega t} \nabla \times (\vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = -\vec{B}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\omega t})$$

$$\Rightarrow e^{i\omega t} \nabla \times (\vec{E}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}) = -i\omega \vec{B}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \left[\left(E_{0z} \frac{\partial}{\partial y} - E_{0y} \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(E_{0x} \frac{\partial}{\partial z} - E_{0z} \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(E_{0y} \frac{\partial}{\partial x} - E_{0x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \hat{z} \right] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} = -i\omega \vec{B}_0 e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

• por componente:

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}] & (-ik_y E_{0z} + ik_z E_{0y}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = -\omega B_{0x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Rightarrow B_{0x} = \frac{\kappa_y}{\omega} E_{0z} - \frac{\kappa_z}{\omega} E_{0y} \\ \hat{y}] & " " " \Rightarrow B_{0y} = \frac{\kappa_z}{\omega} E_{0x} - \frac{\kappa_x}{\omega} E_{0z} \\ \hat{z}] & " " " \Rightarrow B_{0z} = \frac{\kappa_x}{\omega} E_{0y} - \frac{\kappa_y}{\omega} E_{0x} \end{aligned} \right\} (8)$$

Los fórmulas (8) relacionan las amplitudes $\vec{E}_0$ y $\vec{B}_0$, se pueden escribir de manera compacta, y lo importante es que se dedujeron de lo ex. de Maxwell (2):

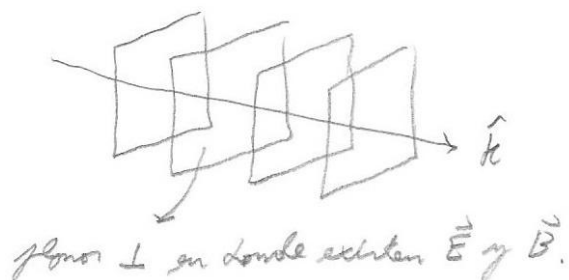
$$(8) \Rightarrow \vec{B}_0 = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0 = \frac{K}{\omega} \hat{k} \times \vec{E}_0 = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}_0 \quad \text{con } K = |\vec{k}|$$

$$\Rightarrow \hat{k} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}$$

• Entorses:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E} \quad (9)$$

De (9) se puede deducir inmediatamente que $\vec{B} \perp \vec{E}$ y que ambos son $\perp$ a la dirección de propagación $\hat{k}$.



- Al igual que todos los ondas, las ondas e.m. transportan energía en la dirección de propagación. Esto se representa con el vector de Poynting

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \text{Re}[\vec{E}] \times \text{Re}[\vec{B}]}$$
 (10) $\vec{S}$ representa el "flujo de energía"

$$\Rightarrow \text{Re}[\vec{E}] = \text{Re}[\vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}] = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

$$\Rightarrow \vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \left(\vec{E}_0 \times \left(\frac{\hat{n} \times \vec{E}_0}{c} \right) \right) \quad \leftarrow \frac{1}{\mu_0 c} = \frac{c}{\mu_0 c^2} = \frac{c \mu_0 \epsilon_0}{\mu_0} = c \epsilon_0$$

$$= c \epsilon_0 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \left[\hat{n} (\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\vec{E}_0 \cdot \hat{n}) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \hat{n}}$$
 (11) $\hat{n}$ tiene la dirección de propagación

se puede definir la densidad de energía de la onda: $\boxed{u = \frac{|\vec{S}|}{c}}$

y la intensidad: $\mathcal{I} = \langle S \rangle$ con $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cdot dt$

$$\Rightarrow \mathcal{I} = \left\langle c \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \hat{n} \right\rangle = \frac{c \epsilon_0 E_0^2}{T} \underbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt}_{T/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{I} = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2}$$
 intensidad de la onda.

P2

a) Se tiene la onda $\vec{E}(x,t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \hat{y}$

• Representación real: $\text{Re}(\vec{E}) = E_0 \frac{\cos(\omega t - kx) + i \sin(\omega t - kx) + \cos(\omega t - kx) - i \sin(\omega t - kx)}{2} \hat{y}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{y}}$$

• Campo magnético: $\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}$ con $\hat{k} = \hat{x}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{x} \times (E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{y}) \Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \hat{z}}$$

• Polarización: $\hat{n} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|} \Rightarrow \boxed{\hat{n} = \hat{y}}$ (lineal)

• Vector de Poynting: $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \hat{y} \times \hat{z}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \hat{x}}$$

b) Ahora la onda es: $\vec{B}(y,t) = B_0 \sin(\omega t - ky) \hat{x} + B_0 \sin(\omega t - ky + \frac{\pi}{2}) \hat{z}$

• Representación compleja: $\vec{B} = \text{Re}[\vec{B}']$

• En general se: $x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) \rightarrow x(t) = \text{Re}[A e^{i\alpha} e^{i\omega t}]$

• Teniendo que transformar los senos a cosenos:

$$\sin(\theta) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \vec{B} = B_0 \cos(\omega t - ky - \frac{\pi}{2}) \hat{x} + B_0 \cos(\omega t - ky + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{B}' = B_0 e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{i(\omega t - ky)} \hat{x} + B_0 e^{i(\omega t - ky)} \hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}' = (e^{-i\frac{\pi}{2}} \hat{x} + \hat{z}) B_0 e^{i(\omega t - ky)}}$$

• *campo eléctrico:* $\vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E} \quad / \quad \hat{k} \times ()$

$$\Rightarrow \hat{k} \times \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times (\hat{k} \times \vec{E}) = \frac{1}{c} [\hat{k} (\hat{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E} (\hat{k} \cdot \hat{k})]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -c (\hat{k} \times \vec{B}) \quad \text{con } \hat{k} = \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = -c e^{i(\omega t - ky)} \hat{y} \times (e^{-i\frac{\pi}{2}} \hat{x} + \hat{z}) B_0$$

$$\vec{E}' = c e^{i(\omega t - ky)} (e^{-i\frac{\pi}{2}} \hat{z} - \hat{x}) B_0 \quad \text{y} \quad \vec{E} = \text{Re}[\vec{E}']$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -c B_0 \cos(\omega t - ky) \hat{x} + c B_0 \sin(\omega t - ky) \hat{z}}$$

• *vector polarización:* $\hat{n} = \frac{\vec{E}}{|\vec{E}|}$ *polarización circular*

$$|\vec{E}|^2 = c^2 B_0^2 (\cos^2(\omega t - ky) + \sin^2(\omega t - ky)) \Rightarrow \boxed{\hat{n} = -\cos(\omega t - ky) \hat{x} + \sin(\omega t - ky) \hat{z}}$$

• *vector de Poynting:*

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} c B_0^2 [-\cos(\omega t - ky) \hat{x} + \sin(\omega t - ky) \hat{z}] \times [\sin(\omega t - ky) \hat{x} + \cos(\omega t - ky) \hat{z}] = \frac{c B_0^2}{\mu_0} (\cos^2(\omega t - ky) + \sin^2(\omega t - ky)) \hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{S} = \frac{c B_0^2}{\mu_0} \hat{y}}$$

{6}

P3

Se consideramos un medio material de inductividad g , permeabilidad μ y permitividad ϵ , pero sin cargas libres:

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (12) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (14)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (13) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (15)$$

- medio lineal: $\vec{J} = g \vec{E}$, entonces:

$$\nabla \times (13) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu g \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu g \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \quad (16)$$

$$\nabla \times (15) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \mu g (\nabla \times \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\mu g \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu g \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} \quad (17)$$

• Se puede hacer el mismo análisis de antes o bien simplemente reemplazar por un onzote y ver cómo se comportan los parámetros; además, por simplicidad asumiremos una dirección de propagación y polarización simple (sea igual para los dos casos solo el componente de los ondas).

$$\Rightarrow \vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\omega t - k z)} \hat{x}$$

(Esto es asumido, no es una sol. 100% general)

• Reemplazando en (16): $\Rightarrow \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial E_x}{\partial t}$

$$\Rightarrow (-ik)^2 E_0 e^{i(\omega t - kz)} = \left[\frac{1}{c^2} (+i\omega)^2 + \mu (i\omega) \right] E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\Rightarrow \boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu\omega}$$

• lo frecuencia debe ser real porque es una magnitud física. Pero modo esto que k sea complejo:

$$k = \alpha + i\beta \Rightarrow k^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu\omega$$

$$\text{Re}() \Rightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{Im}() \Rightarrow 2\alpha\beta = -\mu\omega \Rightarrow \beta = \frac{-\mu\omega}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \frac{\mu^2\omega^2}{4\alpha^2} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \alpha^4 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \alpha^2 - \left(\frac{\mu\omega}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + (\mu\omega)^2}}{2} = \frac{1}{2}\omega^2\epsilon\mu + \frac{1}{2}\sqrt{\omega^4\epsilon^2\mu^2 + \mu^2g^2\omega^2}$$

α es real

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{\omega^2\epsilon\mu}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}} \right) \quad \text{y se simplifica: } \omega \ll \frac{g}{\epsilon}$$

$$\approx \sqrt{\left(\frac{g}{\epsilon\omega}\right)^2} \Rightarrow 1 \ll \frac{g^2}{\epsilon^2\omega^2}$$

$$\approx \frac{g}{\epsilon\omega}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = \frac{\omega^2\epsilon\mu g}{2\epsilon\omega} \Rightarrow \boxed{\alpha = +\sqrt{\frac{\omega\mu g}{2}}}$$

• solo se tiene la sol. con "+" debido que la onda viaja en una sola dirección. (+ $\hat{z}$)

$$\Rightarrow \beta = \frac{-\mu g \omega}{2\alpha} = \frac{-\mu g \omega}{2} \sqrt{\frac{2}{\mu g \omega}} = -\sqrt{\frac{\mu g \omega}{2}} \Rightarrow \boxed{\beta = -\alpha}$$

• finalmente se tiene: $\boxed{K = \alpha(1-i) \text{ con } \alpha = \sqrt{\frac{\mu g \omega}{2}}}$

$$\Rightarrow \vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - Kz)} \hat{x} = E_0 e^{i\omega t} e^{\underbrace{-i\alpha z(1-i)}_{\rightarrow -i\alpha z - \alpha z}} \hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\alpha z} \hat{x}} \quad (18)$$

• y el campo magnético: $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{c} \hat{z} \times (E_0 e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\alpha z} \hat{x})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \alpha z)} e^{-\alpha z} \hat{y}} \quad (19)$$

• Por en. (18) y (19) muestran campos que decaen exponencialmente en el espacio.

$\Rightarrow$ Los ondas en este medio material decaen rápidamente