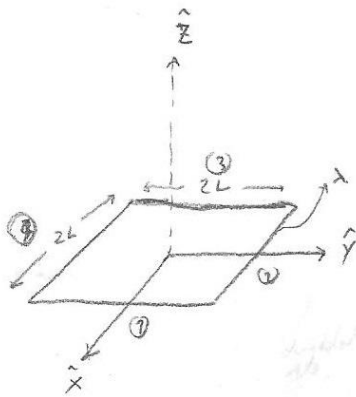


Punto P3, C1



a) · Posmetigonos en coordenados cartesianas:

$$\vec{r} = z \hat{z}, \quad \vec{r}_1 = L \hat{x} + y \hat{y}, \quad \vec{r}_2 = x \hat{x} + L \hat{y}, \quad \vec{r}_3 = -L \hat{x} + y \hat{y},$$

$$\vec{r}_4 = x \hat{x} - L \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4$$

densidad
carga

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\int_{-L}^L \frac{z \hat{z} - L \hat{x} - y \hat{y}}{(z^2 + L^2 + y^2)^{3/2}} dy + \int_{-L}^L \frac{z \hat{z} - x \hat{x} - L \hat{y}}{(z^2 + x^2 + L^2)^{3/2}} dx + \int_{-L}^L \frac{z \hat{z} + L \hat{x} - y \hat{y}}{(z^2 + L^2 + y^2)^{3/2}} dy \right.$$

sumando los integrales
(los diferenciales son nulos!)

$$\left. + \int_{-L}^L \frac{z \hat{z} - x \hat{x} + L \hat{y}}{(z^2 + x^2 + L^2)^{3/2}} dx \right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[4 \int_{-L}^L \frac{z \hat{z} dx}{(z^2 + L^2 + x^2)^{3/2}} - 4 \int_{-L}^L \frac{x \hat{x} dx}{(z^2 + L^2 + x^2)^{3/2}} \right] = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} [I_1 - I_2]$$

$$\text{Integrales: } I_2 = \int_{-L}^L \frac{x \hat{x} dx}{(z^2 + L^2 + x^2)^{3/2}} = - \frac{\hat{x}}{(z^2 + L^2 + x^2)^{1/2}} \Big|_{-L}^L = \frac{-\hat{x}}{(z^2 + L^2 + L^2)^{1/2}} + \frac{\hat{x}}{(z^2 + L^2 + L^2)^{1/2}} = 0$$

Esto es, porque no puede depender de $\hat{x}$ o $\hat{y}$
por simetría.

$$I_1 = \int_{-L}^L \frac{z \hat{z} dx}{(z^2 + L^2 + x^2)^{3/2}} = z \hat{z} \int_{\psi_i}^{\psi_f} \frac{\sec^2 \psi d\psi}{a^3 (1 + \tan^2 \psi)^{3/2}} = \frac{z \hat{z}}{a^2} \int_{\psi_i}^{\psi_f} \cos \psi d\psi = \frac{z \hat{z}}{a^2} \sin \psi \Big|_{\psi_i}^{\psi_f}$$

$$\text{con } a^2 = z^2 + L^2 \Rightarrow x = a \tan \psi$$

$$\Rightarrow dx = a \sec^2 \psi d\psi \quad \rightarrow \quad \frac{x}{a} = \tan \psi \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sin \psi, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \cos \psi$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{z \hat{z}}{a^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \Big|_{-L}^{+L} = \frac{z \hat{z}}{z^2 + L^2} \frac{1}{(z^2 + L^2 + L^2)^{3/2}} (L - (-L))$$

$a^2 = z^2 + L^2$

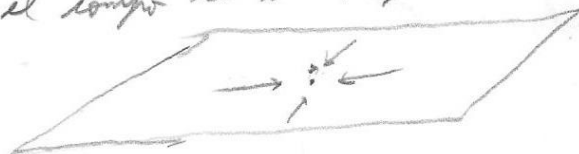
$$\Rightarrow \vec{E}(z) = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{2L z \hat{z}}{\sqrt{2L^2 + z^2}} \frac{1}{z^2 + L^2}$$

b) Now $z \ll L$ $\lim_{z \ll L} \vec{E}(z) = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{\frac{z}{L} \hat{z}}{\sqrt{z + (\frac{z}{L})^2}} \frac{\frac{z}{L}}{1 + (\frac{z}{L})^2} \rightarrow 0$

$\Rightarrow \frac{z}{L} \ll 1$ $\frac{z}{L} \ll 1$

$$\Rightarrow \lim_{\frac{z}{L} \ll 1} \vec{E}(z) = \vec{0}$$

Es físicamente correcto, si z es mucho más pequeño que L es como si estuviéramos el campo muy cerca del origen, es donde el campo se anula por simetría.



Now $z \gg L$

$$\Rightarrow \frac{z}{L} \gg 1$$

$$\vec{E}(z) = \frac{\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{2L z \hat{z}}{\sqrt{2L^2 + z^2}} \frac{1}{z^2 + L^2} = \frac{2L\lambda}{\pi \epsilon_0} \frac{\hat{z}}{z^2}$$

La carga total de las placas es: $Q = 4 \cdot (2L) \cdot \lambda = 8\lambda$

$$= \frac{8L\lambda}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{z^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{\frac{z}{L} \gg 1} \vec{E}(z) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{\hat{z}}{z^2}$$

A mayor muy lejados de las placas, esto se comporta como una carga puntual.

