Electromagnetismo: Clase Auxiliar # 1

Profesor: Matías Montesinos, Auxiliares: Cristian Barrera H. y Alejandro Escobar Nachar

15 de Septiembre de 2015

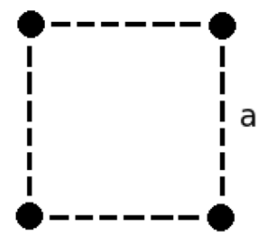
Problema 1

Considere un sistema de 4 partículas idénticas de carga q. Las partículas están fijas de manera que forman un cuadrado de la lado a. Calcule:

(a) El campo eléctrico en el plano del cuadrado. Comente sobre su valor en el centro del cuadrado.

(b) La fuerza eléctrica que siente cualquiera de las cargas.

(c) El campo eléctrico en el eje perpendicular al plano del cuadrado que pasa por su centro ¿Cúal es el mayor valor que puede tener el campo en este eje?

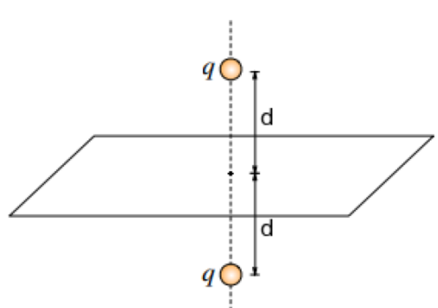


Problema 2:

Dos partículas de carga q están separadas por una distancia $2d$. Por el punto medio del segmento que las une se traza un plano perpendicular al mismo. Si se coloca una carga Q de prueba en el plano, calcule:

(a) El lugar geométrico en donde el módulo de la fuerza que siente Q es máximo.

(b) Discuta sobre la existencia de puntos de equilibrio y su estabilidad en el sistema (*hint* : ¿cómo afectan los signos de las cargas q y Q?).



Saludos

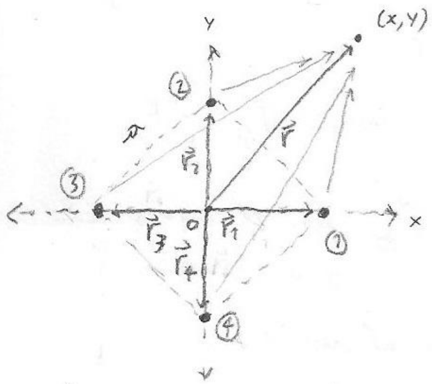
Pauta Auxiliar N°1

(14/09/2015)

P1 cargas puntuales:

· Tenemos un sistema de 4 cargas puntuales iguales que forman un cuadrado de lado a.

a) Para calcular el campo en el plano del cuadrado usamos coordenadas cartesianas centradas en el centro del cuadrado:

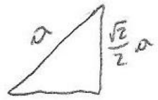


· $\vec r$ es la coordenada en donde queremos calcular el campo.

$$\Rightarrow \quad \vec r = x\hat x + y\hat y \quad \text{(un vector cualquiera del plano)}$$

· $\vec r_i$ con $i = 1,2,3,4$ son las coordenadas de las 4 cargas.

$$\Rightarrow \quad \vec r_1 = \frac{\sqrt2}{2}a\,\hat x,\ \vec r_2 = \frac{\sqrt2}{2}a\,\hat y,\ \vec r_3 = \frac{-\sqrt2}{2}a\,\hat x,\ \vec r_4 = \frac{-\sqrt2}{2}a\,\hat y$$



· Por simplicidad definimos $b = \frac{\sqrt2}{2}a$

(todas las cargas son iguales)

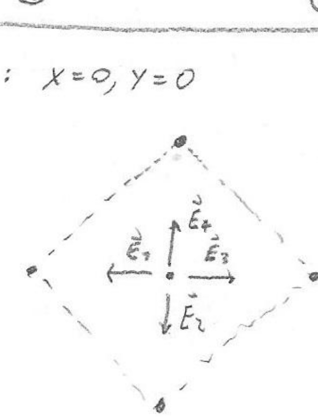
· El campo está dado por la ley de Coulomb: $\vec E(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{4}\frac{\vec r - \vec r_i}{\|\vec r - \vec r_i\|^3}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec E(x,y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[\underbrace{\frac{(x-b)\hat x + y\hat y}{\left((x-b)^2+y^2\right)^{3/2}}}_{①} + \underbrace{\frac{x\hat x + (y-b)\hat y}{\left(x^2+(y-b)^2\right)^{3/2}}}_{②} + \underbrace{\frac{(x+b)\hat x + y\hat y}{\left((x+b)^2+y^2\right)^{3/2}}}_{③} + \underbrace{\frac{x\hat x + (y+b)\hat y}{\left(x^2+(y+b)^2\right)^{3/2}}}_{④}\Bigg]} \quad (1)$$

· Si evaluamos en el origen (centro del cuadrado): $x=0,\ y=0$

$$(1) \Rightarrow \vec E(0,0) = \frac{q\,b}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\left[\cancel{-\hat x} \cancel{-\hat y} \cancel{+\hat x} \cancel{+\hat y}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec E(0,0) = 0} \longrightarrow$$ El resultado es esperado porque los campos se anulan!



$\vec E_1 = -\vec E_3$

$\vec E_2 = -\vec E_4$ $\Rightarrow \vec E = 0$

b) · Cada carga siente 3 fuerzas de la forma: $\vec{F}_i = q\vec{E}_i$, por lo que para calcular la fuerza que siente una carga basta evaluar (1) en la posición de la carga y <u>no</u> colocar el campo de esa carga en la fórmula.

· Fuerza que siente ①:

$$\vec{F}_{①} = q\left[\vec{E}_2(\vec{r}_1) + \vec{E}_3(\vec{r}_1) + \vec{E}_4(\vec{r}_1)\right]$$

$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{b\hat{x} - \cancel{b\hat{y}}}{(b^2+b^2)^{3/2}} + \frac{2b\hat{x}}{((2b)^2)^{3/2}} + \frac{b\hat{x} + \cancel{b\hat{y}}}{(b^2+b^2)^{3/2}}\right]$$

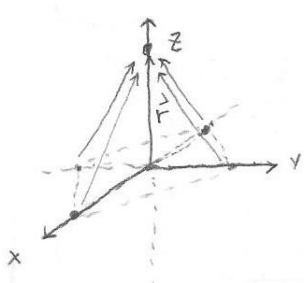
$$= \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2b}{(b^2)^{3/2}}\left[\frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{2^3}\right]\hat{x} = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 b^2}\,\frac{2^{3/2}+1}{8}\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{①} = \frac{q^2(2^{3/2}+1)}{16\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{x}} \quad (2)$$

· Por simetría se tiene: $\vec{F}_{③} = -\vec{F}_{①}$

y $\vec{F}_{②} = -\vec{F}_{④}$ con el mismo módulo y en dirección $\hat{y}$.

c) En coordenadas esto corresponde a calcular el campo en el eje z.



· Entonces ahora $\vec{r} = z\hat{z}$, luego:

$$\vec{E}(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z\hat{z} - \cancel{b\hat{x}}}{(z^2+b^2)^{3/2}} + \frac{z\hat{z} + \cancel{b\hat{x}}}{(z^2+b^2)^{3/2}} + \frac{z\hat{z} - \cancel{b\hat{y}}}{(z^2+b^2)^{3/2}} + \frac{z\hat{z} + \cancel{b\hat{y}}}{(z^2+b^2)^{3/2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(z) = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\frac{z\hat{z}}{(z^2+b^2)^{3/2}}} \quad (3)$$

campo eléctrico en el eje z.

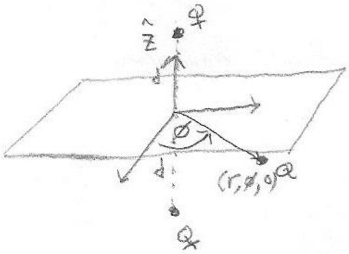
· nos interesa el máximo del valor absoluto del campo: $\frac{\partial|\vec{E}|}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial|\vec{E}|}{\partial z} = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(z^2+b^2)^{3/2}} - \frac{\frac{3}{2}2z^2}{(z^2+b^2)^{5/2}}\right] = \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(z^2+b^2)^{5/2}}\left[z^2+b^2-3z^2\right] = 0$$

$\Rightarrow \boxed{z = \frac{\pm b}{\sqrt{2}}}$ y con $b = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ $\Rightarrow$ los máximos están en: $\boxed{z = \pm\frac{a}{2}}$

P2 a). La fuerza que siente la carga Q es: $\vec{F} = Q\vec{E}$ en donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico generado por las cargas q en el plano que está entremedio de ellas.

- Calculamos el campo usando coord. cilíndricas $(\hat{r}, \hat{\phi}, \hat{z})$:



$$\vec{E}(r,\phi) = \vec{E}_{\text{carga en } d} + \vec{E}_{\text{carga en } -d}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{r\hat{r} - \cancel{d\hat{z}}}{(r^2+d^2)^{3/2}} + \frac{r\hat{r} + \cancel{d\hat{z}}}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right]$$

- con lo cual la fuerza nos queda: $\vec{F} = Q\vec{E} = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r\hat{r}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$

- Tenemos entonces que el módulo sólo depende de r: $|\vec{F}| = F(r) = \dfrac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}$

- Derivamos $F(r)$ (el cálculo es idéntico a la parte (c) del P1):

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial r} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(r^2+d^2)^{3/2}}\left[r^2 + d^2 - 3r^2\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{d}{\sqrt{2}}}$$

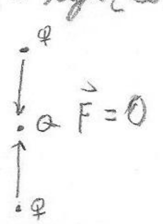
$\Rightarrow$ El lugar geométrico en donde $F(r)$ es máximo es una circunferencia de radio $r = \frac{d}{\sqrt{2}}$

b). Los puntos de equilibrio están en donde no hay dinámica para la carga Q

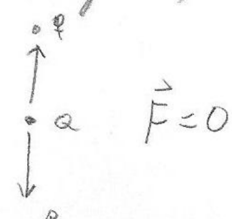
- Sin importar el signo de las cargas, el único lugar del espacio en donde $\vec{F} = \vec{0}$ es justo en la mitad de las cargas q.

función signo

$\text{sgn}[q] = \text{sgn}[Q]$



$\text{sgn}[q] = -\text{sgn}[Q]$



¿Y qué podemos decir de la estabilidad?

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r\hat{r}}{(r^2+d^2)^{3/2}} = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi}\right]$$

- Si estamos en el equilibrio $r=0$ no tiene sentido hablar de velocidad angular $\Rightarrow \dot{\phi} = \ddot{\phi} = 0$ y decimos $r = 0 + \delta r$ (una perturbación pequeña):

$$\boxed{\hat{r}} \Rightarrow \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\delta r}{(\underbrace{\delta r^2}_{0}+d^2)^{3/2}} = m\,\delta\ddot{r}$$

Con signos iguales: $(qQ>0)$

$$\Rightarrow \delta\ddot{r} - \underbrace{\frac{|qQ|}{4\pi\varepsilon_0 d^3 m}}_{>0}\delta r = 0 \Rightarrow \boxed{r=0 \text{ es inestable!}}$$

Con signos distintos: $(qQ<0)$

$$\Rightarrow \delta\ddot{r} + \frac{|qQ|}{4\pi\varepsilon_0 d^3 m}\delta r = 0 \Rightarrow \boxed{r=0 \text{ es estable!}}$$