Clase auxiliar 11

P1. $y(x,t) = 4 \operatorname{sen}(2x - t)$

a) Ecuación de onda $\qquad \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

En este caso

$\dfrac{\partial y}{\partial x} = 8 \cos(2x - t) \qquad \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -16 \operatorname{sen}(2x - t)$

$\dfrac{\partial y}{\partial t} = -4 \cos(2x - t) \qquad \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -4 \operatorname{sen}(2x - t)$

$$-4 \operatorname{sen}(2x - t) = c^2 (-16 \operatorname{sen}(2x - t))$$

$$c^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$$

Otra forma de verlo

$$y(x,t) = 4 \operatorname{sen}\left(2\left(x - \frac{t}{2}\right)\right) = f(x - ct)$$

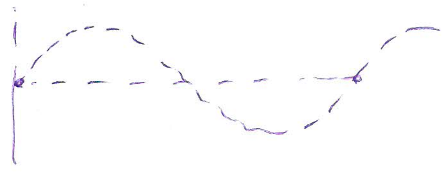
con $c = \dfrac{1}{2}$

b) La onda se propaga hacia la derecha

c) $y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$

• λ (longitud de onda) $\qquad$ * Para t fijo se completa un ciclo cuando

$kx = 2\pi$



El valor de x en que se cumple esto es $x = \lambda \Rightarrow \lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

En este caso $\lambda = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Periodo

* Para x fijo se completa un ciclo cuando $\omega t = 2\pi$

El tiempo en que se completa un ciclo es el periodo.

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$, en este caso : $T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

d) Velocidad máxima de cualquier segmento de la cuerda.

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

$$\dot{y}(x,t) = -A\omega \cos(kx - \omega t)$$

El máximo de la velocidad se da cuando $\cos(kx - \omega t) = -1$ y es

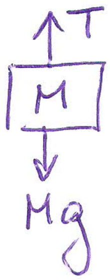
$\boxed{v = A\omega}$ en este caso $\boxed{v = 4}$

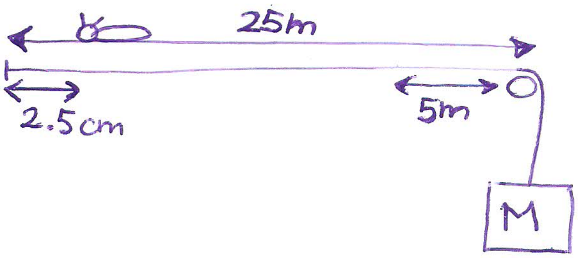
- Problema del gusanito

Ecuación de onda: $c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} y$

Para una cuerda: $c^2 = \frac{T}{\rho}$, donde T es la tensión y ρ la densidad lineal de la cuerda.

En este caso





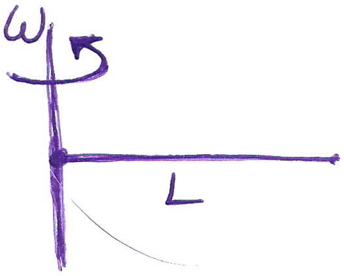
$$T - Mg = 0 \Rightarrow T = Mg = 10\,kg \cdot 10\,m/s^2 = 10^2\,kg\frac{m}{s^2}$$

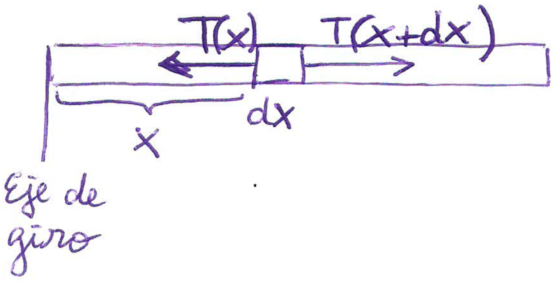
Mientras que $\rho = \frac{\text{masa de la cuerda}}{\text{longitud de la cuerda}} = \frac{0.25\,kg}{25\,m} = 10^{-2}\,\frac{kg}{m}$

$$\Rightarrow c = \sqrt{\frac{10^2}{10^{-2}}}\,m/s = 100\,m/s$$

$\Rightarrow$ El gusanito no alcanza a llegar a la orilla.

Para la cuerda estirada se cumple:





$$T(x+dx) - T(x) = -\rho\, dx\, \omega^2 x$$

$$\frac{T(x+dx) - T(x)}{dx} = -\rho\, \omega^2 x$$

$$\frac{dT}{dx} = -\rho \omega^2 x \Rightarrow T(x) = -\rho \omega^2 \frac{x^2}{2} + B$$

$$T(L) = 0 \Rightarrow -\rho \omega^2 \frac{L^2}{2} + B = 0$$

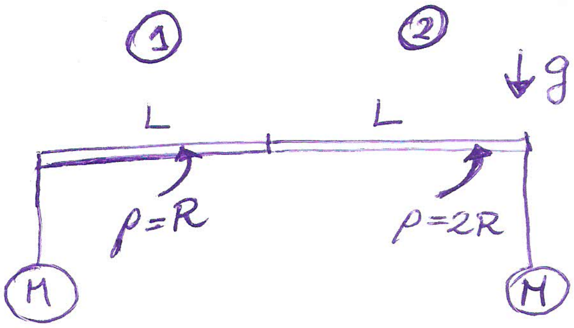
$$B = \rho \omega^2 \frac{L^2}{2}$$

$$T(x) = \rho \omega^2 \frac{L^2}{2} - \rho \omega^2 \frac{x^2}{2} = \frac{\rho \omega^2}{2}(L^2 - x^2)$$

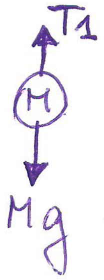
Luego la velocidad del pulso es:

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{\omega^2}{2}(L^2 - x^2)}$$

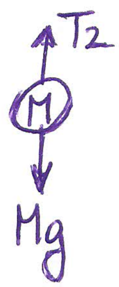
4.



Lado izquierdo



Lado derecho



$$T_1 - Mg = 0 \qquad T_2 - Mg = 0$$

$$T_1 = T_2 = Mg$$

Velocidad en medio 1 $\quad c_1 = \sqrt{\dfrac{Mg}{R}} \qquad c_2 = \sqrt{\dfrac{Mg}{2R}}$

El pulso más rápido recorre una distancia L en un tiempo $t = L \Big/ \sqrt{Mg/R}$

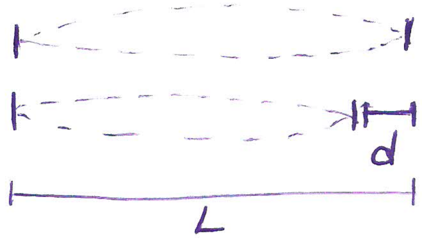
En ese tiempo el pulso más lento ha recorrido:

$$d = \sqrt{\frac{Mg}{2R}} \cdot \frac{L}{\sqrt{Mg}} \sqrt{R} = \frac{L}{\sqrt{2}}$$

En ese instante el problema pasa a ser el de dos pulsos propagándose en sentido opuesto, en el mismo medio ($c = c_2$). Luego, estos se encuentran en el punto medio entre $L/\sqrt{2}$ y L

$$D = \text{distancia de encuentro} = \frac{L + L/\sqrt{2}}{2}$$

$$y = 2A \sin(Kx)\cos(\omega t+\varphi)$$



$y(0,t) = 0 \Rightarrow$ siempre

$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin(KL) = 0 \Rightarrow KL = n\pi$

$$K = \frac{n\pi}{L}$$

Para la nota Mi alta la frecuencia fundamental $(n=1)$ es 330 Hz $\Rightarrow \omega_1 = 2\pi \cdot 330$

Mientras que para la nota Fa es 350 Hz

$$\omega_2 = 2\pi \cdot 350$$

La velocidad $c = \frac{\omega}{K} \left(\frac{2\pi f}{2\pi/\lambda}\right)$ debe mantenerse.

$$\frac{\omega_1}{K_1} = \frac{\omega_2}{K_2} \Leftrightarrow \frac{2\pi \cdot 330}{\pi/L} = \frac{2\pi \cdot 350}{\pi/L-d}$$

$$\frac{330}{350} = \frac{L-d}{L}$$

$$L - \frac{33}{35}L = d$$

$$L\left(1 - \frac{33}{35}\right) = d \Rightarrow d = L \cdot \frac{2}{35} = 64 \cdot \frac{2}{35}\,cm \sim 3.7\,cm$$