

Lo prometido es deuda: El problema de la Avestruz

por Jeremías Garay Labra

18 de Noviembre del 2015

Al escribir las ecuaciones de movimiento para el soporte de masa M se obtiene:

$$M\ddot{x} = -Mg - N - k(x - L) \quad (1)$$

Y para la avestruz:

$$m\ddot{y} = -mg + N \quad (2)$$

Reemplazando de (2) la normal desconocida y reemplazándola en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -Mg - k(x - L) - m\ddot{y} - mg \\ &= -(M + m)g + kL - kx - m\ddot{y} \end{aligned}$$

Ahora usamos que por definición en el problema en cada instante de tiempo debe cumplirse que $y(t) = x(t) + y_a(t)$, por lo que derivando dos veces y reemplazando esto en lo anterior:

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -(M + m)g + kL - kx - m(x + \ddot{y}_a) \\ M\ddot{x} + m\ddot{x} + kx &= -(M + m)g + kL - m\ddot{y}_a \\ (M + m)\ddot{x} + kx &= -(M + m)g + kL - m\ddot{y}_a \\ \ddot{x} + \frac{k}{(M + m)}x &= \left(-g + \frac{kL}{M + m}\right) - \frac{m}{M + m}\ddot{y}_a \end{aligned}$$

Puesto que sabemos que $y_a = h_a + D\cos(\Omega t)$, al derivar dos veces obtenemos:

$$\ddot{y}_a = -D\Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (3)$$

Reemplazando esto obtenemos:

$$\ddot{x} + \frac{k}{(M + m)}x = \left(-g + \frac{kL}{M + m}\right) + \frac{mD\Omega^2}{M + m}\cos(\Omega t)$$

Esta ecuación es casi un oscilador forzado salvo por el término constante $(-g + \frac{kL}{M+m})$, pero se vió que siempre es posible eliminar esa constante mediante un cambio de variables del tipo:

$$x = z + \alpha \quad (4)$$

Con α constante. De esta forma $\dot{x} = \dot{z}$. Reemplazando esto obtenemos:

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{k}{(M + m)}(z + \alpha) &= \left(-g + \frac{kL}{M + m}\right) + \frac{mD\Omega^2}{M + m}\cos(\Omega t) \\ \ddot{z} + \frac{k}{(M + m)}z + \frac{k}{(M + m)}\alpha &= \left(-g + \frac{kL}{M + m}\right) + \frac{mD\Omega^2}{M + m}\cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Imponiendo que $\frac{k}{(M+m)}\alpha = (-g + \frac{kL}{M+m})$ la constante es eliminada

Finalmente la ecuación a resolver es:

$$\ddot{z} + \frac{k}{(M+m)}z = \frac{mD\Omega^2}{M+m}\cos(\Omega t) \quad (5)$$

Sabemos desde la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias que la solución a este problema es la suma de dos: *i)* La solución de la ecuación cuyo lado derecho es nulo (*m.a.s*) y *ii)* cualquier solución particular de la ecuación. Cuando el lado derecho es nulo, la solución es bien conocida:

$$z_1(t) = A \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{(M+m)}}t + \phi) \quad (6)$$

Para encontrar una solución particular, asumimos inicialmente que $z(t) = \beta \cdot \cos(\Omega t)$, de esta forma, reemplazando en la ecuación:

$$\begin{aligned} -\beta\Omega^2\cos(\Omega t) + \frac{k}{(M+m)}\beta\cos(\Omega t) &= \frac{mD\Omega^2}{M+m}\cos(\Omega t) \\ -\beta\Omega^2 + \frac{k}{(M+m)}\beta &= \frac{mD\Omega^2}{M+m} \\ \beta &= \frac{\frac{mD\Omega^2}{M+m}}{\frac{k}{(M+m)} - \Omega^2} \end{aligned}$$

Por lo que la solución final es:

$$z(t) = A \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{(M+m)}}t + \phi) + \frac{\frac{mD\Omega^2}{M+m}}{\frac{k}{(M+m)} - \Omega^2} \cdot \cos(\Omega t) \quad (7)$$

Y finalmente $x(t)$ se encuentra:

$$x(t) = (L - \frac{g(M+m)}{k}) + A \cdot \cos(\sqrt{\frac{k}{(M+m)}}t + \phi) + \frac{\frac{mD\Omega^2}{M+m}}{\frac{k}{(M+m)} - \Omega^2} \cdot \cos(\Omega t) \quad (8)$$

Al analizar vemos que la solución del problema es tipo:

$$x(t) = x_o + A_1\cos(w_1t + \phi) + A_2\cos(w_2t) \quad (9)$$

Osea, es un movimiento oscilatorio con dos frecuencias. En general la curva en función del tiempo es complicada. Con ayuda de un computador podemos graficar de la siguiente manera. Graficamos para un caso donde: $x_o = 1 \text{ cm}$, $A_1 = 2 \text{ cm}$, $A_2 = 0,4 \text{ cm}$, $w_1 = 1 \text{ Hz}$, $w_2 = 7 \text{ Hz}$ y $\phi = 0^\circ$:

