Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

FI1001-1 Introducción a la Física Newtoniana 2015
Ejercicio 1

Profesor: **Claudio Romero Z.**
Auxiliar: Marcos Casanova

24 de Septiembre de 2015

Tiempo: 40 min

1. Panchito suelta una pelota desde una altura h. La pelota parte del reposo, choca más tarde con el suelo, rebotando con una rapidez proporcional a la que tenía en el instante que tocó el suelo, es decir $|V_{rebote}| = \alpha |V_{llegada}|$, con $0 < \alpha < 1$. La pelota sube con esta nueva velocidad y se repite el mismo procedimiento de manera sucesiva hasta que se detiene.
a.- Determine la altura que alcanza después del 1er rebote.
b.- Determine la altura después del 2do rebote.
c.- Determine la altura después del rebote n-ésimo.
d.- La distancia total recorrida desde que se soltó la pelota hasta el rebote n-ésimo.
e.- La distancia total recorrida hasta que se detiene, esto es $n \to \infty$.

Solución: Consideremos la partícula que inicialmente está a una altura h del suelo. La velocidad con que llega al suelo por 1er vez (Vf) viene dada por:

$$V_f^2 - V_0^2 = 2a\Delta y \tag{1}$$

Con las condiciones iniciales $V_0 = 0$ y $\Delta y = h$ llegamos a que la velocidad al tocar el suelo es:

$$V_f = \sqrt{2gh} \tag{2}$$

Ahora ocurre el primer rebote. La velocidad con la que rebota (V_1) está dado por $V_1 = \alpha V_f$. La altura después del primer rebote está dado por:

$$V_f^2 - V_1^2 = 2gh_1 \tag{3}$$

Donde $V_f = 0$ en la altura máxima. Por tanto, la nueva altura está dada por:

$$\frac{V_1^2}{2g} = h_1 \tag{4}$$

Reemplazamos el valor de V_1 y encontramos el valor de h_1 en función de h.

$$\frac{\alpha^2 2gh}{2g} = \alpha^2 h = h_1 \tag{5}$$

$$\boxed{\alpha^2 h = h_1}$$

La velocidad del 2do rebote (V_2) está dado por $V_2 = \alpha V_1 = \alpha^2 V_f$. Usando la misma relación anterior.

$$\frac{V_2^2}{2g} = h_2 \tag{6}$$

$$\boxed{\alpha^4 h = h_2}$$

Repitiendo para el 3er rebote obtendremos el siguiente resultado:

$$\boxed{\alpha^6 h = h_3}$$

Por lo tanto, para el rebote n-ésimo:

$$\boxed{\alpha^{2n} h = h_n}$$

Como necesitamos ahora la suma hasta el término n-ésimo, esto viene dado por:

$$S = h + 2h_1 + 2h_2 + 2h_3 + \ldots + 2h_n \tag{7}$$

En donde el factor 2 es por considerar subir y bajar. Reemplazamos los valores de h_n

$$S = h + 2h\alpha^2 + 2h\alpha^4 + 2h\alpha^6 + \ldots + 2h\alpha^{2n} \tag{8}$$

Factorizamos por 2h desde el 2do término en adelante, resultando:

$$S = h + 2h(\alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n}) \tag{9}$$

Dentro del paréntesis anterior sumamos y restamos 1 para formar la serie.

$$S = h + 2h(\alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n} + 1 - 1) \tag{10}$$

Distinguimos la serie:

$$S = h + 2h(\{1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n}\} - 1) \tag{11}$$

Usamos el cambio de variable $r = \alpha^2$

$$S = h + 2h(\{1 + r + r^2 + \ldots + r^n\} - 1) \tag{12}$$

Esta serie geométrica tiene un valor conocido.

$$S = h + 2h(\{\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\} - 1) \tag{13}$$

Resolvemos y llegamos al siguiente resultado:

$$S = h + 2h\alpha^2\{\frac{1-\alpha^{2n}}{1-\alpha^2}\} \tag{14}$$

Si reemplazamos por $n = 2$ obtenemos el resultado conocido:

$$S = h + 2h\alpha^2 + 2h\alpha^4 \tag{15}$$

Cuando la suma se vuelve infinita tenemos:

$$S = h + 2h(\{1 + \alpha^2 + \alpha^4 + \ldots + \alpha^{2n} + \ldots\} - 1) \tag{16}$$

cuyo resultado es:

$$S = h + 2h(\{\frac{1}{1-\alpha^2}\} - 1) \tag{17}$$

Lo que finalmente nos lleva a:

$$S = h + 2h\{\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\} \tag{18}$$

Si tomamos el límite de $n \to \infty$ en (14) llegamos al mismo resultado anterior.