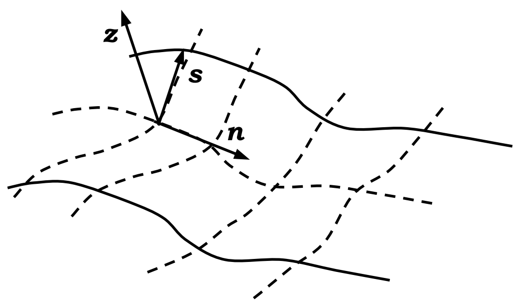
ECUACION DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA SOLIDA EN UN MEDIO FLUIDO EN MOVIMIENTO

Prof. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

El análisis realizado en las clases anteriores corresponde al caso de una partícula que se mueve en un medio infinito en reposo. En esta clase, el análisis se extenderá a la situación en la que el fluido está en movimiento, situación que encontraremos con mayor frecuencia en la práctica.

Sean:

- $u_{pi} = (u_p, v_p, w_p)$ la velocidad instantánea de la partícula
- $u_i = (u, v, w)$ la velocidad instantánea del fluido
- z coordenada normal a la superficie del lecho del cauce
- s coordenada tangencial a la superficie, en la dirección de la línea de corriente
- n coordenada tangencial a la superficie, normal a la dirección de la línea de corriente



- $x_{pi}(t) = (s_p, n_p, z_p)$ posición del centroide de la partícula
- $u_{fi}(t) = u_i(x_{Pi}(t), t)$ velocidad del fluido extrapolada al centroide de la partícula
- $u_{ri} = u_{pi} - u_{fi}$, velocidad relatoiva de la partícula

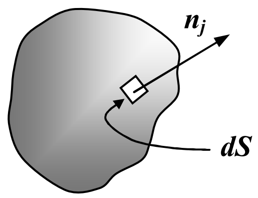
La ecuación del movimiento de la partícula es:

$$\rho_s V \frac{du_{pi}}{dt} = \rho_s V g_i + \int_S \tau_{ij} n_j dS \qquad (1)$$

donde ρ_s es la densidad de la partícula y V su volumen. g_i es la componente de la aceleración de gravedad en la dirección i. τ_{ij} es el tensor de esfuerzos actuando sobre la superficie S de la partícula, el que debe satisfacer la ecuación de Navier- Stokes:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + g_i \qquad (2)$$

n_j es un vector unitario normal a la superficie de la partícula.



Con el objeto de obtener la fuerza resultante sobre la partícula, la integral debe llevarse a cabo sobre la superficie de ella. La integral $\int_S \tau_{ij} n_j dS$ sujeta a la Ec. 2 es tremendamente difícil de llevar a cabo, pero podemos evitarla si sabemos de antemano qué fuerzas son las que se generarán. Simplifiquémonos la vida considerando que las fuerzas que actúan sobre la partícula son las siguientes:

$$\int_S \tau_{ij} n_j dS = B_i + D_i + A_i + L_i \qquad (3)$$

donde B_i denota la fuerza debido al empuje del fluido. Notar que como el fluido está en movimiento, debe incluirse la posible aceleración que éste tenga:

$$B_i = -\rho V g_i + \rho V \frac{du_{fi}}{dt} \qquad (4)$$

D_i corresponde a la fuerza de arrastre, la que debe expresarse en términos de la velocidad relativa:

$$D_i = \frac{1}{2} \rho C_D A_p |u_r| u_{ri} \qquad (5)$$

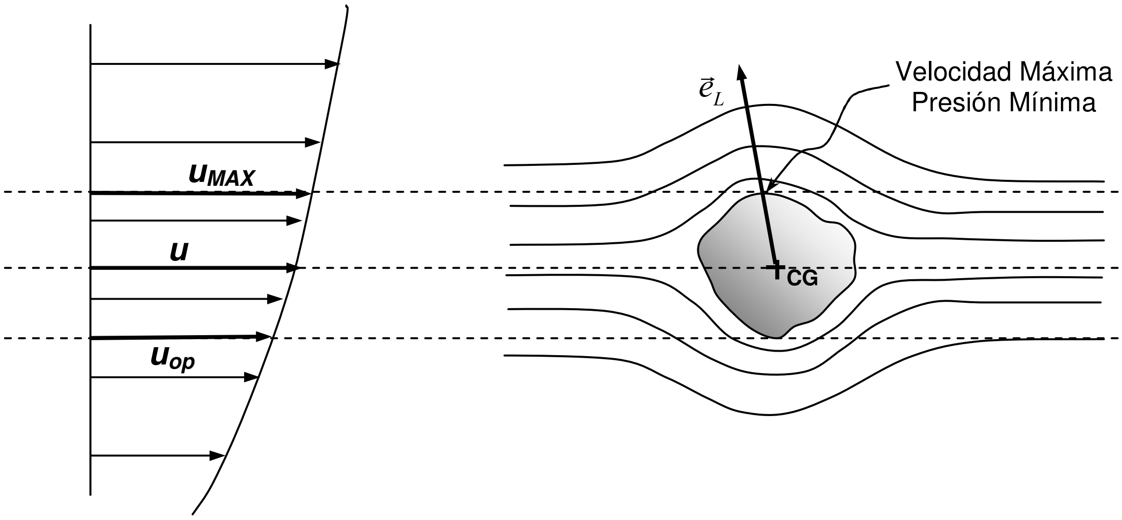
donde $|u_r| = \sqrt{u_{ri} u_{ri}}$ (notación de Einstein).

A_i corresponde a la masa agregada. Corresponde a la fuerza rewquerida para acelerar el fluido que está alrededor de la partícula a medida que ésta se desplaza y está dada por:

$$A_i = -\rho c_m V \frac{du_{ri}}{dt} \qquad (6)$$

(La deducción de la Ec. 6 se hace en el curso CI71B, Mecánica de Fluidos Avanzada. Quienes no lo han tomado, pueden encontrarla en cualquier buen libro de Hidrodinámica). El coeficiente de masa agregada, c_m , toma el valor 0,5 para el caso de una esfera.

L_i corresponde a la fuerza de sustentación hidrodinámica, que surge de la distribución de velocidades del fluido. L_i puede ligarse a la diferencia de presión dinámica que se genera alrededor de la partícula.



Definimos $\vec{e}_L$ al vector unitario que pasa por el centroide de la partícula y el punto de presión mínima (corresponde a la dirección en la que actúa a fuerza de sustentación hidrodinámica).

La fuerza de sustentación hidrodinámica puede aproximarse como:

$$L_i = \frac{1}{2}\rho C_L A_p \left(\left|u_{MAX}\right|^2 - \left|u_{op}\right|^2\right) e_{Li} \qquad (7)$$

$\left|u_{MAX}\right|$ y $\left|u_{op}\right|$ corresponden a la velocidad, no perturbada por la partícula, evaluadas en la posición de velocidad ,máxima y en el lado opuesto de la partícula, respectivamente, como se muestra en la figura. C_L es el coeficiente de sustentación hidrodinámico. Quienes no han cursado CI71B, pueden encontrar la deducción de L_i en cualquier libro de Hidrodinámica.

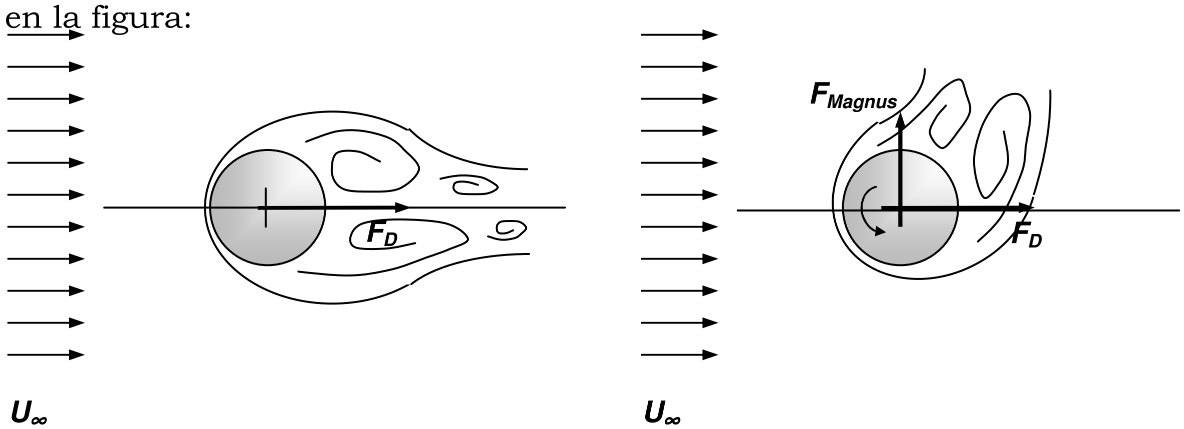
Luego, reemplazando en Ecs. 1 y 3:

$$\rho_s V \frac{du_{pi}}{dt} = \rho_s V g_i + B_i + D_i + A_i + L_i \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\rho_s V \frac{du_{pi}}{dt} = \rho_s V g_i - \rho V g_i + \rho V \frac{du_{fi}}{dt} + \frac{1}{2}\rho C_D A_p \left|u_r\right| u_{ri} \\ - \rho c_m V \frac{du_{ri}}{dt} + \frac{1}{2}\rho C_L A_p \left(\left|u_{MAX}\right|^2 - \left|u_{op}\right|^2\right) e_{Li}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\rho_s V \frac{du_{pi}}{dt} = (\rho_s - \rho) V g_i + \rho V \frac{du_{fi}}{dt} + \frac{1}{2}\rho C_D A_p \left|u_r\right| u_{ri} \\ - \rho c_m V \frac{du_{ri}}{dt} + \frac{1}{2}\rho C_L A_p \left(\left|u_{MAX}\right|^2 - \left|u_{op}\right|^2\right) e_{Li}\end{aligned} \tag{10}$$

En la integral de la Ec. 3 se han despreciado dos términos: el correspondiente a la fuerza de Basset y el asociado al efecto Magnus. La fuerza de Basset corresponde a una fuerza de origen viscoso que considera la historia del movimiento del fluido. La fuerza de Magnus corresponde a una fuerza de sustentación que se origina debido a la rotación de la partícula, la que al rotar hace que se desplace la capa límite, generándose una fuerza normal a la dirección del flujo principal, como se esquematiza en la figura:



SITUACION SIN ROTACION DE LA ESFERA
(NO HAY EFECTO MAGNUS)

ESFERA ROTANDO
(EFECTO MAGNUS)

La fuerza de Basset puede despreciarse si los efectos viscosos no son importantes.

CASO LIMITE DE LA Ec. 10 PARA PARTICULAS MUY FINAS

Apliquemos la Ec. 10 al caso de partículas muy finas. En este caso, la fuerza de sustentación puede despreciarse ya que el tamaño de la partícula es mucho más pequeña que cualquier longitud característica del flujo. La fuerza de arrastre se calcula mediante la relación de Stokes:

$$D_i = -3\pi\rho\nu D\left(u_{pi} - u_{fi}\right) \tag{11}$$

La Ec. 10 se reduce a:

$$V\frac{d}{dt}\left[\left(\rho_s + c_m\rho\right)u_{pi} - \rho\left(1 + c_m\right)u_{fi}\right] = \left(\rho_s - \rho\right)Vg_i + -3\pi\rho\nu D\left(u_{pi} - u_{fi}\right) \tag{12}$$

Si las partículas son pequeñas y su tiempo de respuesta es mucho menor que la escala de tiempo de las fluctuaciones del flujo, el término de aceleración de la Ec. 12 puede despreciarse, quedando:

$$0 = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 g_i - 3\pi\nu D\left(u_{pi} - u_{fi}\right) \tag{13}$$

Si se tiene un sistema coordenado tal que g_i =(0, 0, -g) =-$g\delta_{3i}$:

$$0 = -\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 g\delta_{3i} - 3\pi\nu D\left(u_{pi} - u_{fi}\right) \tag{14}$$

Para un fluido en reposo u_{fi} = 0 y u_{pi} = (0, 0, -υ_s):

$$0 = -\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 g + 3\pi\nu D\upsilon_s \tag{15}$$

De donde obtenemos la ecuación de Stokes, obtenida en una clase anterior:

$$\upsilon_s = \frac{1}{18}\frac{D^2}{\nu}g\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) \tag{16}$$

Al reemplazar la Ec. 16 en la Ec. 14, resulta:

$$u_{pi} = u_{fi} - \upsilon_s\delta_{3i} \tag{17}$$

La Ec. 17 indica que una partícula sólida sigue en las direcciones i = 1, 2 exactamente el mismo movimiento que el fluido. Para i = 3, la velocidad de la partícula corresponde a la del fluido, reducida en una cantidad igual a la velocidad de sedimentación, o sea:

$$\begin{aligned} u_{p1} &= u_{f1} \\ u_{p2} &= u_{f2} \\ u_{p3} &= u_{f3} - v_s \end{aligned} \qquad (18)$$

La Ec. 17 es la ecuación usada para todos los análisis de sedimentos en suspensión, aún cuando estrictamente sólo es válida para las condiciones bajo las cuales ha sido deducida en esta clase.