



TRANSPORTE HIDRAULICO DE SOLIDOS EN TUBERIAS

(Resumen)

Prof. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS



TRANSPORTE HIDRAULICO DE SOLIDOS EN TUBERIAS

Variables que Condicionan el Transporte Hidráulico de Sólidos en Tuberías

Los elementos involucrados en el transporte hidráulico de sólidos en tuberías o ductos son la fase sólida, la fase líquida, el ducto o tubería y el flujo. Una lista de las variables de interés de cada uno de los elementos podría ser la siguiente:

FASE SÓLIDA:

- Forma de las partículas
- Tamaño de las partículas
- Distribución granulométrica
- Densidad
- Angulo de fricción interna

FASE LÍQUIDA:

- Viscosidad
- Densidad

DUCTO:

- Forma
- Tamaño
- Rugosidad
- Pendiente

FLUJO:

- Velocidad o caudal
- Concentración de sólidos

OTROS:

- Aceleración de gravedad
- Coeficiente de fricción sólidos-pared del ducto



Si la caracterización del fenómeno se hace en base sólo a las variables anteriores, implícitamente se están despreciando fenómenos que no pueden ser representados por ellas. Por ejemplo, fenómenos de coagulación, fuerzas de atracción molecular o electromagnéticas, etc.

Cuando el ducto es una tubería circular, el tamaño y forma quedan representados por una sola variable, su diámetro D .

Muchas veces el efecto de la forma, tamaño y velocidad de las partículas queda bien representado por la velocidad de sedimentación, w_s , o el coeficiente de arrastre hidrodinámico de las partículas, C_D .

Debido a que en una suspensión el peso de las partículas se ve contrarrestado por el empuje, la variable relevante no es la densidad de la partícula r_s , sino la densidad reducida $r_s - r$, siendo r la densidad del fluido.

Propiedades de la Fase Líquida

Las propiedades de interés para la fase líquida la constituyen su densidad r y viscosidad m .

$$r = 0,9999 + 2 \times 10^{-5} T - 5 \times 10^{-6} T^2$$

$$\frac{1}{m} = 2,1482 \left[(T - 8,435) + \sqrt{8078,4 + (T - 8,435)^2} \right] - 120$$

En las relaciones anteriores, la temperatura se expresa en grados Celsius, la densidad en gr/cm^3 y la viscosidad en centipoises (cP). ($1 \text{ kg}/\text{m}^2 = 9,8 \text{ Pa}$ 1 poise = 10 Pa-s). Frecuentemente aparece en las ecuaciones la viscosidad cinemática, n , teniéndose la siguiente expresión para ella (la temperatura se expresa en grados Celsius y la viscosidad cinemática en cm^2/s):

$$n = \frac{1,78 \times 10^{-2}}{1 + 33,68 \times 10^{-3} T + 2,21 \times 10^{-4} T^2}$$

Propiedades de la Fase Sólida

La caracterización más básica de la fase sólida es su tamaño, distribución granulométrica y forma de las partículas.



Frecuentemente se caracteriza a la fase sólida es a través del coeficiente de arrastre de la partícula, C_D , o su velocidad de sedimentación, w_s .

Para el caso de flujo permanente alrededor de esferas, una curva ajustada a los datos experimentales es representada por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{24}{Re_P} & ; & \quad Re_P < 0,2 \\ C_D &= \frac{24}{Re_P} \left[1 + 0,15 Re_P^{0,687} \right] & ; & \quad 0,2 < Re_P < 10^3 \\ C_D &= 0,44 & ; & \quad 10^3 < Re_P < 3 \times 10^5 \end{aligned}$$

donde $Re_P = \frac{d|v_R|}{\nu}$, siendo v_R la velocidad relativa entre la partícula y el fluido. Shook y Roco (1991) presentan la ecuación alternativa siguiente, válida para $Re_P < 7 \times 10^4$:

$$C_D = \frac{24}{Re_P} + \frac{3,5}{Re_P^{0,3}} + 0,23k \log\left(\frac{Re_P}{1500}\right)$$

$k = 0$ para $Re_P < 1500$ y $k = 1$ en caso contrario.

La velocidad de sedimentación, w_s , corresponde a la velocidad con que se mueve una partícula en un fluido en reposo ($v_R = w_s$), cuando están en equilibrio el peso de la partícula, el empuje y la fuerza de arrastre hidrodinámico. Para partículas esféricas de diámetro d resulta:

$$w_s = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{gd}{C_D} \frac{r_s - r}{r}}$$

En general, w_s , debe determinarse en forma iterativa, debido a la dependencia de C_D con Re_P . En el rango de Stokes ($Re_P < 0,2$), la velocidad de sedimentación está dada por:

$$w_s = \frac{1}{18} \frac{gd^2}{\nu} (r_s - r)$$



Partículas que no son esféricas se clasifican de acuerdo a un factor de forma, FF , definido como

$$FF = \frac{a_1}{\sqrt{a_2 a_3}}$$

donde a_1 , a_2 y a_3 son las dimensiones triaxiales, siendo a_1 la menor. Para sedimentos naturales, $0,5 < FF < 0,9$.

Usando una gran cantidad de información obtenida por otros autores, con FF en el rango $0,5 - 0,7$, Cheng ajustó una expresión que permite determinar la velocidad de sedimentación de manera directa:

$$Re_p = \left[\sqrt{25 + 1,2 d_*^2} - 5 \right]^{1,5}$$

$$\text{donde } d_* = \left(\frac{g d^3}{n^2} \frac{r_s - r}{r} \right)^{1/3}, Re_p = \frac{w_s d}{n}.$$

EFFECTO DE LA CONCENTRACIÓN

$$\frac{w_s}{w_{so}} = F\left(c, \frac{d}{D}\right)$$

w_s : velocidad de sedimentación del conjunto de partículas

w_{so} : velocidad de sedimentación de una partícula sedimentando en un medio infinito

Burgers obtuvo teóricamente para esferas de igual tamaño, muy baja concentraciones y sin efecto de pared la relación:

$$\frac{w_s}{w_{so}} = \frac{1}{1 + 6,88c}$$

Famularo y Happel extendieron teóricamente la relación anterior hasta concentraciones $c \sim 0,2$;

$$\frac{w_s}{w_{so}} = \frac{1}{1 + 1,3c^{0,33}}$$



Wallis (1969) obtuvo la siguiente expresión semiteórica, válida para valores del número de Reynolds asociado a la partícula aislada en un medio infinito, Re_{p0} , menores que 1000:

$$\frac{w_s}{w_{so}} = (1 - c)^n$$

donde el exponente n está dado por:

$$n = 4,7 \frac{1 + 0,15 Re_{po}^{0,687}}{1 + 0,253 Re_{po}^{0,687}}$$

Es frecuente encontrar en los estudios de transporte hidráulico de sólidos en tuberías la relación obtenida por Richardson y Zaki empíricamente. La expresión es la misma que la de Wallis, pero el exponente n depende tanto de Re_{p0} como del cociente d/D . Los autores dan las siguientes expresiones para n dependiendo del valor de Re_{p0} (Fuentes, 1994):

$$\begin{aligned} n &= 4,65 + 19,5 \frac{d}{D} & , & \quad Re_{po} < 0,2 \\ n &= \left(4,35 + 17,5 \frac{d}{D} \right) Re_{po}^{-0,03} & , & \quad 0,2 < Re_{po} < 1 \\ n &= \left(4,45 + 18,0 \frac{d}{D} \right) Re_{po}^{-0,1} & , & \quad 1 < Re_{po} < 200 \\ n &= 4,45 Re_{po}^{-0,1} & , & \quad 200 < Re_{po} < 500 \\ n &= 2,39 & , & \quad 500 < Re_{po} \end{aligned}$$

Cheng propone la siguiente corrección por efecto de concentración:

$$\frac{w_s}{w_{so}} = \frac{2 - 2c}{2 - 3c} \left[\frac{\sqrt{25 + 1,2d_{**}^2} - 5}{\sqrt{25 + 1,2d_*^2} - 5} \right]^{3/2}$$

donde



$$d_{**} = \left[\frac{gd^3}{n'^2} \frac{(1-c)(S-1)}{1+c(S-1)} \right]^{1/3}, \quad n' = \frac{2n}{2-3c}$$

Otra propiedad importante de la fase sólida es su concentración máxima, o “concentración de empaquetamiento”, c_{max} , y corresponde a la máxima concentración en volumen que puede alcanzar un conjunto de partículas en un recipiente. En el caso de esferas, la concentración de empaquetamiento depende del arreglo. Si es cúbico, $c_{max} = 52,4\%$ y si es romboédrico, $c_{max} = 74\%$. Para arreglos aleatorios de esferas se tiene que $c_{max} \sim 60 - 64\%$. Mediciones en sedimentos naturales indican que $c_{max} \sim 60 - 65\%$.

Cuando se analiza la interacción entre partículas, aparece la concentración lineal, l , que es la razón entre el diámetro de las partículas y la distancia entre superficies. Depende de la concentración de material y su arreglo, el que se refleja en la concentración máxima:

$$l = \left[\left(\frac{c_{max}}{c} \right)^{1/3} - 1 \right]^{-1}$$

Conceptos Básicos de los Flujos de Mezclas Líquido-Sólidos

El esfuerzo resultante en un flujo de una mezcla líquido-sólidos en una tubería, se proviene de los esfuerzos actuando en la fase líquida, la interacción líquido-sólidos, interacción entre partículas sólidas, interacción líquido-pared de la tubería e interacción sólidos-pared.

Los esfuerzos originados en la fase líquida o entre el líquido y la pared de la tubería son bien conocidos y su origen se debe a la acción de la viscosidad y a los esfuerzos turbulentos o de Reynolds. La interacción sólidos-líquidos es, esencialmente, una del tipo de arrastre hidrodinámico. Las interacciones sólidos-sólidos pueden ser de tres tipos: por choque de las partículas sólidas, por roce o fricción entre ellas, (esfuerzos de Coulomb) o por carga.

Bagnold (1954) fue el primero en identificar los esfuerzos dispersivos en los flujos de mezclas sólidos-líquidos. Las colisiones de las partículas entre sí y con el lecho dan origen a un esfuerzo normal en la dirección del flujo y aumentan el esfuerzo de corte total, respecto a un flujo de un líquido puro.



De este modo, según Bagnold, el esfuerzo de corte total tiene dos componentes: una debido al líquido entre las partículas, t_L , y otro debido a la interacción de los sólidos, t_B :

$$t = t_L + t_B$$

La relación entre el esfuerzo de corte, t_B , (en la dirección del flujo) y el esfuerzo dispersivo normal, P , está dada por:

$$t_B = P \tan a$$

a corresponde a un ángulo de fricción interna del conjunto de partículas sometidas a esfuerzo de corte y es función del esfuerzo adimensional G^2 definido como

$$G^2 = \frac{t_B r_s d^2}{l m^2}$$

$\tan a$ varía entre 0,75 ($G^2 < 30$) y 0,32 ($G^2 > 3200$). Roco y Shook (1984b) sugieren una dependencia con un número de Froude local, definido como $Fr^* = (r u_*^2) / (r_m g d(S-1))$, donde u_* es la velocidad friccional, r_m es la densidad de la mezcla y S es la densidad relativa de los sólidos.

El comportamiento de los esfuerzos dispersivos o de Bagnold está asociado a otro número adimensional, el número de Bagnold, Ba , que representa la razón entre el esfuerzo inducido por la inercia de los granos y el esfuerzo viscoso. Está definido como:

$$Ba = \frac{l^{1/2} r_s d^2}{m} \left| \frac{du}{dy} \right|$$

$|du/dy|$ es la tasa de deformación angular de la mezcla, muchas veces denotada por $\dot{\gamma}$. Existe una gran similitud entre el significado del número de Bagnold y el número de Reynolds. Para valores bajos del número de Bagnold ($Ba < 5$), el conjunto de partículas sólidas presentan un comportamiento cuasiestático. Para valores $Ba < 40$, el comportamiento de la mezcla líquido-sólidos es como la de un líquido equivalente de gran viscosidad y el régimen de flujo se denomina *macroviscoso*. Para valores $Ba > 450$, dominan las colisiones entre partículas y el régimen de flujo se denomina *inercial*. En el rango $40 < Ba < 450$ se encuentra un régimen de transición.



Bagnold observó que en el régimen macroviscoso $t_B \sim \dot{\gamma}$ y en el régimen inercial $t_B \sim \dot{\gamma}^2$. De este modo, la similitud entre Ba y Re es completa. Si consideramos el flujo de líquidos en tuberías, para $Re < 2000$ se tiene el flujo laminar, para $Re > 4000$ el flujo es turbulento, con un régimen de transición (inestable) entre ambos. En el régimen laminar, el esfuerzo de corte está dado por $t_L = m\dot{\gamma}$ y en el régimen turbulento por $t_L = r\ell^2\dot{\gamma}^2$, donde ℓ es la longitud de mezcla de Prandtl.

La importancia de los esfuerzos de Bagnold, y su adecuada cuantificación es evidente, ya que ellos deben ser incluidos en el análisis del transporte hidráulico de partículas sólidas, en particular si se busca determinar la distribución de concentración (Roco and Shook, 1981, 1983, 1984a, 1984b).

Propiedades de las Suspensiones Líquido-Sólidos

Desde un punto de vista macroscópico, las suspensiones líquido-sólidos presentan comportamientos que las asemejan a los líquidos. En particular, es posible definir una densidad y asociarles una rheología.

La densidad de la mezcla está dada por

$$r_m = cr_s + (1 - c)r$$

La presencia de partículas en un fluido hace que la viscosidad de la suspensión aumente, con respecto a la del fluido. Incluso, puede hacer que el comportamiento rheológico de la mezcla sea distinto a la del líquido. El efecto que tienen las partículas en la viscosidad de la suspensión fue cuantificado por primera vez en forma teórica por Einstein, quien determinó para flujos laminares de suspensiones newtonianas conteniendo esferas en bajas concentraciones ($c < 0,02$), la viscosidad de la mezcla está dada por:

$$\frac{m_m}{m} = 1 + 2,5c$$

Vocadlo:

$$\frac{m_m}{m} = \frac{\exp(2,5c - n c/c_{max})}{(1 - c/c_{max})^n}$$



Obtenida empíricamente y válida para partículas de cualquier forma. Según el autor, el parámetro n varía entre 2 y 2,5. Para arenas, $n = 2$ y $c_{max} = 0,63$.

Thomas, utilizando resultados de estudios experimentales con esferas uniformes, propuso la siguiente correlación, la que no tiene restricción para c :

$$\frac{m_m}{m} = 1 + 2,5c + 10,05c^2 + 0.00273 \exp(16.6c)$$

Es importante tener presente que, siempre que sea posible, debe hacerse un ensayo para cada pulpa particular con el objeto de determinar la viscosidad de la mezcla. Debido a que la concentración no es el único parámetro relevante, no es posible definir a priori la expresión que mejor se ajustará a una pulpa específica. Aún cuando la relación de Thomas no involucra c_{max} , tiene el mérito de haber sido obtenida a partir de una gran cantidad de datos publicados por otros investigadores y es frecuentemente utilizada.

La presencia de c_{max} en las relaciones es importante. Si la concentración aumenta en la mezcla, las partículas comienzan a entorpecer su movimiento. Si se alcanza la concentración máxima, ellas estarán siempre en contacto, generándose un freno al movimiento, lo que puede interpretarse (de manera poco rigurosa), como que la viscosidad de la mezcla es infinita. Varias de las expresiones anteriores muestran que si $c \rightarrow c_{max}$, entonces $m_m \rightarrow \infty$, concordando con el raciocinio anterior. Este hecho provee, además, de un método empírico para determinar c_{max} , ya que m_m aumenta rápidamente a medida que la concentración se acerca a la máxima.

Las expresiones para la viscosidad presentadas anteriormente son válidas para suspensiones o mezclas que se comportan como un fluido newtoniano. Sin embargo, es posible que a medida aumenta la concentración de finos en la mezcla, ésta cambie su comportamiento rheológico. Considerando rheologías que no dependen del tiempo, las más comunes de encontrar en pulpas son las correspondientes a plástico de Bingham, pseudoplástico y pseudoplástico con esfuerzo de fluencia. Las ecuaciones constitutivas son las siguientes:



Plástico de Bingham: $t = t_o + h\dot{g}$

t_o es el esfuerzo de corte de fluencia y h es la viscosidad plástica o coeficiente de rigidez.

Pseudoplástico: $t = K\dot{g}^n$

Pseudoplástico con esfuerzo de fluencia: $t = t_o + K\dot{g}^n$

En los fluidos pseudoplásticos, $n < 1$ (si $n > 1$, el fluido se denomina *dilatante*).

Varias definiciones de viscosidad se han empleado para correlacionar datos de transporte de pulpas en tuberías, siendo algunas de ellas:

Viscosidad aparente, m_a , definida como la razón entre el esfuerzo de corte actuando en la pared y la tasa de deformación en la pared:

$$m_a = \frac{t_w}{\dot{g}|_w}$$

Viscosidad efectiva, m_e , definida como la razón entre el esfuerzo de corte en la pared y la tasa de deformación promedio de la tubería. Para un flujo con velocidad media V en una tubería de diámetro D , la definición es:

$$m_e = \frac{t_w}{8 \frac{V}{D}}$$

Para un plástico de Bingham, la viscosidad efectiva se obtiene de:

$$\frac{1}{m_e} = \frac{1}{h} \left[1 - \frac{4}{3} \left(\frac{t_o}{t_w} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{t_o}{t_w} \right)^4 \right]$$

Si se desprecia el último término en paréntesis, el cálculo se simplifica enormemente, manteniendo una precisión suficiente para aplicaciones prácticas. Al hacer esto, la viscosidad efectiva puede calcularse explícitamente de:



$$m_e = h \left[1 + \frac{t_o D}{6hV} \right]$$

Para los fluidos regidos por una ley de potencia (pseudoplástico o dilatante), la viscosidad efectiva está dada por:

$$m_e = K \left(\frac{4n}{3n+1} \right)^n \left(\frac{8V}{D} \right)^{n-1}$$

Debe tenerse cuidado que al aplicar las relaciones anteriores, las condiciones del flujo efectivamente correspondan a laminar. Redefiniendo el número de Reynolds para tuberías en términos de la viscosidad efectiva:

$$Re = \frac{VD_r}{m_e}$$

el flujo será laminar para $Re < 2100$. (Notar que si el flujo es de una mezcla, en el número de Reynolds anterior debe usarse la densidad de la mezcla, r_m).

Viscosidad límite, m_∞ , es la viscosidad a la que tiende el fluido a grandes tasas de deformación.

Regímenes de Transporte

Debido a la complejidad de la naturaleza de los flujos bifásicos sólidos-líquido, se hace necesario hacer una clasificación de los regímenes de transporte que pueden darse. Esta clasificación es de interés, no sólo desde un punto de vista práctico, sino que además permite identificar el mecanismo de transferencia dominante para una situación particular. Por otro lado, los patrones de flujo proveen una guía para asimilar situaciones con las reportadas en la literatura. La dificultad para predecir el régimen de flujo está en que éste se define subjetivamente de diferentes maneras por los distintos autores, por lo que no se puede establecer límites y definiciones precisas.

Existen dos comportamientos extremos en los flujos de mezclas: uno es aquel en el cual los sólidos se encuentran totalmente dispersos en el medio fluido con una concentración local de sólidos que es la misma en cualquier punto de la sección del ducto. Esta situación se denomina régimen homogéneo. El otro comportamiento extremo es cuando los sólidos se



encuentran segregados, moviéndose sobre el fondo del conducto, ya sea deslizándose o por saltación.

Entre estos dos casos extremos, se presenta un continuo de situaciones que, con el objeto de simplificar el análisis, son agrupadas en unos pocos casos, dependiendo del fenómeno que domina en la suspensión o interacción entre partículas sólidas, así como del autor que propone la clasificación.

Debido a que coexisten dos fases en el flujo, en estricto rigor no se puede hablar de una mezcla homogénea, por lo que muchos autores prefieren hacer una clasificación en base a la capacidad de sedimentar que tienen las partículas en el flujo, refiriéndose así a *mezclas que no sedimentan* (nonsettling slurries).

Por defecto, se definen las *mezclas que sedimentan*, este caso incluye la llamado régimen heterogéneo (o no-homogéneo), el escurrimiento con lecho móvil y el escurrimiento con lecho fijo.

En sólidos de granulometría extendida, es posible que la fracción más fina se comporte como partículas que no sedimentan y las más gruesas tiendan a decantar. En este caso se habla de un régimen intermedio o hetero-homogéneo.



RÉGIMEN HOMOGÉNEO

Límite del Régimen Homogéneo

Existen varios criterios para definir cuándo una mezcla estará en el régimen homogéneo. Estos criterios no son uniformes y, dependiendo del autor, se basan en la velocidad de sedimentación de las partículas, velocidad del flujo, distribución de concentración, etc.

Según Faddick, una mezcla será homogénea si sus partículas están en el rango de Stokes:

$$\frac{w_s d}{n} \leq 1$$

donde w_s es la velocidad de sedimentación de la partícula (corregida por efecto de concentración), d es el diámetro de la partícula y n la viscosidad del fluido.

Newitt et al. (1955) determinaron un criterio que incluye las características del flujo y la tubería:

$$\frac{1800gDw_s}{V^3} \leq 1$$

donde D es el diámetro de la tubería, V la velocidad media del flujo y g la aceleración de gravedad. Este criterio es consistente con el hecho que la pérdida de carga de un flujo en régimen homogéneo es mayor que la de un flujo en régimen heterogéneo.

Spells define una “velocidad estándar” de la mezcla, V_E , que aunque no corresponde exactamente a una velocidad límite del régimen homogéneo, está muy cerca de ella:

$$V_E^{1,225} = 0,074gd_{85}(S-1)\left(\frac{Dr_m}{m_m}\right)^{0,775}$$

$S = r_s / r$ es la densidad relativa de los sólidos y d_{85} es el diámetro de la curva granulométrica bajo el cual se encuentra el 85% de los sólidos.



Para tener régimen homogéneo debe cumplirse que

$$V \geq V_E$$

Para la condición límite $V = V_E$, es posible escribir la relación anterior de manera más elegante al utilizar un número de Froude $Fr_{dp} = V / \sqrt{gd_{85}(S-1)}$ y un Reynolds $Re_{mp} = D r_m \sqrt{gd_{85}(S-1)} / \mu_m$, quedando:

$$Fr_{dp} \geq 0,1196 Re_{mp}^{0,633}$$

Basado en cuán uniforme es la distribución de concentración, en el libro de Wasp et al. se presenta una condición en términos de la razón entre la velocidad de sedimentación de las partículas y la velocidad friccional del flujo, de tal manera que el régimen puede considerarse homogéneo cuando;

$$\frac{w_s}{u_*} < a$$

donde el parámetro a toma el valor de 0,2 según Thomas o 0,13 según Charles (Wasp et. Al, 1977).

Pérdida de Carga en el Régimen Homogéneo

La pérdida de carga para mezclas en el régimen homogéneo se calcula considerando a la mezcla como un fluido equivalente, cuyas propiedades han sido alteradas por la presencia de partículas en suspensión. Dependiendo de la concentración, la rheología de la mezcla puede ser distinta a la del líquido, por lo que es fundamental realizar los ensayos que permitan definir la ley constitutiva de la mezcla, para las concentraciones de interés.

La pérdida de carga de la mezcla se determina a partir de la relación de Darcy-Weisbach:

$$J_m = f_C \frac{1}{D} \frac{V^2}{2g}$$

donde f_C es el factor de fricción correspondiente a la rheología de la mezcla y régimen de flujo que corresponda. Es frecuente encontrar en la literatura



asociada al transporte de pulpas el coeficiente de fricción de Fanning, f , definido a partir de:

$$t_w = \frac{1}{2} r f V^2$$

la relación entre el coeficiente de fricción de Fanning y el de la ecuación de Darcy-Weisbach es:

$$f_C = 4f$$

Si el comportamiento de la mezcla es newtoniano, f_C se determina a partir de la ecuación de Colebrook-White o el ábaco de Moody, cuidando de calcular el número de Reynolds con la densidad y viscosidad de la mezcla.

Las relaciones de cálculo para los distintos tipos de comportamiento reológico son las siguientes:

Fluido newtoniano

Definición de número de Reynolds: $Re = \frac{r_m VD}{m_m}$

Régimen laminar $Re < 2100$ (aprox.): $f = \frac{16}{Re}$

Régimen turbulento.

Si k_s es el tamaño de la aspereza de la pared de la tubería, se define el número de Reynolds de la aspereza como $Re_k = \frac{k_s}{D} \sqrt{\frac{f}{2}} Re$

Régimen turbulento con paredes hidrodinámicamente lisas
($Re > 2100$, $Re_k < 5$):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log \left(\frac{Re \sqrt{f}}{1,26} \right)$$

Régimen turbulento con paredes hidrodinámicamente rugosas
($Re > 2100$, $Re_k > 70$):



$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4 \log \left(\frac{D}{2k_s} \right) + 1,48$$

Régimen turbulento con paredes en transición lisa-rugosas
($Re > 2100$, $5 < Re_k < 5$):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -4 \log \left(\frac{k_s}{3,7D} + \frac{1,26}{Re \sqrt{f}} \right)$$

Plástico de Bingham

Definición de número de Reynolds: $Re_B = \frac{r_m VD}{h \left(1 + \frac{t_o D}{6hV} \right)}$

Régimen laminar $Re_B < 2100$ (aprox.)

Una expresión aproximada para el factor de fricción en el régimen laminar es:

$$f = \frac{16}{Re_B}$$

La expresión exacta se da en términos del número de Hedstrom, He , y la razón entre el esfuerzo de fluencia y el de la pared, a .

$$He = \frac{t_o D^2 r_m}{h^2} \quad , \quad a = \frac{t_o}{t_w}$$

$$\frac{1}{Re_B} = \frac{f}{16} - \frac{He}{6 Re_B^2} + \frac{He^4}{3 f^3 Re_B^8}$$

Régimen turbulento.

Se define el número de Reynolds de la aspereza como $Re_k = \frac{k_s}{D} \sqrt{\frac{f}{2}} Re_B$

Régimen turbulento con paredes hidrodinámicamente lisas
($Re_B > 4000$, $Re_k < 5$):



$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4,53 \log(Re_B \sqrt{f}) - 2,3 + 4,5 \log(1 - a)$$

Régimen turbulento con paredes hidrodinámicamente rugosas
($Re > 4000$, $Re_k > 70$):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4,07 \log\left(\frac{D}{2k_s}\right) + 3,36$$

Régimen turbulento con paredes en transición lisa-rugosas
($Re > 4000$, $5 < Re_k < 5$):

$$f = \frac{f_{agua-rug}}{f_{agua-lisa}} f_{B-lisa}$$

donde;

$f_{agua-rug}$ es el factor de fricción para agua sobre pared rugosa y $f_{agua-lisa}$ es el factor de fricción para agua sobre pared lisa, evaluados para $Re = Re_B$.

f_{B-lisa} es el factor de fricción para el plástico de Bingham sobre pared lisa.

Ley de potencia (Fluidos pseudoplástico o dilatante)

Definición de número de Reynolds: $Re_{PL} = \frac{8V^{2-n} D^n r_m}{K} \left(\frac{n}{2+6n} \right)^n$

Régimen laminar $Re_{PL} < 2100$ (aprox.)

$$f = \frac{16}{Re_{PL}}$$

Régimen turbulento.

Se define el número de Reynolds de la aspereza como $Re_k = \frac{k_s}{D} \sqrt{\frac{f}{2}} Re_{PL}$

Régimen turbulento con paredes hidrodinámicamente lisas
($Re_{PL} > 4000$, $Re_k < 5$):



$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4,53}{n} \log \left(Re_{PLC} \sqrt{f^{2-n}} \right) + \frac{2,69}{n} - 2,95 + 0,68 \frac{5n-8}{n}$$

donde $Re_{PLC} = \frac{V^{2-n} D^n r_m}{8^{n-1} K}$

Régimen turbulento con paredes hidrodinámicamente rugosas
($Re_{PL} > 4000$, $Re_k > 70$):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4,07 \log \left(\frac{D}{2k_s} \right) + 6 - \frac{2,65}{n}$$

Régimen turbulento con paredes en transición lisa-rugosas
($Re > 4000$, $5 < Re_k < 5$):

$$f = \frac{f_{agua-rug}}{f_{agua-lisa}} f_{PL-lisa}$$

donde;

$f_{agua-rug}$ es el factor de fricción para agua sobre pared rugosa y $f_{agua-lisa}$ es el factor de fricción para agua sobre pared lisa, evaluados para $Re = Re_{PL}$.

$f_{PL-lisa}$ es el factor de fricción para el fluido con ley de potencia sobre pared rugosa.

Pseudoplástico con esfuerzo de fluencia

Definición de número de Reynolds: $Re_{PLC} = \frac{V^{2-n} D^n r_m}{8^{n-1} K}$

Régimen laminar $Re_{PL} < 2100$ (aprox.)

$$f = \frac{1}{2^{2n-4}} \frac{1}{A^n} \frac{1}{Re_{PLC}}$$

donde $A = n(1-a)^{\frac{n+1}{n}} \left[\frac{(1-a)^2}{3n+1} + \frac{2a(1-a)}{2n+1} + \frac{a^2}{n+1} \right]$



Régimen turbulento.

Se define el número de Reynolds de la aspereza como $Re_k = \frac{k_s}{D} \sqrt{\frac{f}{2}} Re_{PLC}$

Régimen turbulento con paredes hidrodinámicamente lisas
($Re_{PLC} > 2100$, $Re_k < 5$):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = \frac{4,53}{n} \log \left(Re_{PLC} \sqrt{f}^{2-n} \right) + \frac{4,53}{n} \log(1-a) + \frac{2,69}{n} - 2,95 + 0,68 \frac{5n-8}{n}$$

Régimen turbulento con paredes hidrodinámicamente rugosas
($Re_{PLC} > 4000$, $Re_k > 70$):

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 4,07 \log \left(\frac{D}{2k_s} \right) + 6 - \frac{2,65}{n}$$

Régimen turbulento con paredes en transición lisa-rugosas
($Re > 4000$, $5 < Re_k < 5$):

$$f = \frac{f_{agua-rug}}{f_{agua-lisa}} f_{PLC-lisa}$$

donde;

$f_{agua-rug}$ es el factor de fricción para agua sobre pared rugosa y $f_{agua-lisa}$ es el factor de fricción para agua sobre pared lisa, evaluados para $Re = Re_{PLC}$.

$f_{PL-lisa}$ es el factor de fricción para el fluido con ley de potencia sobre pared rugosa.

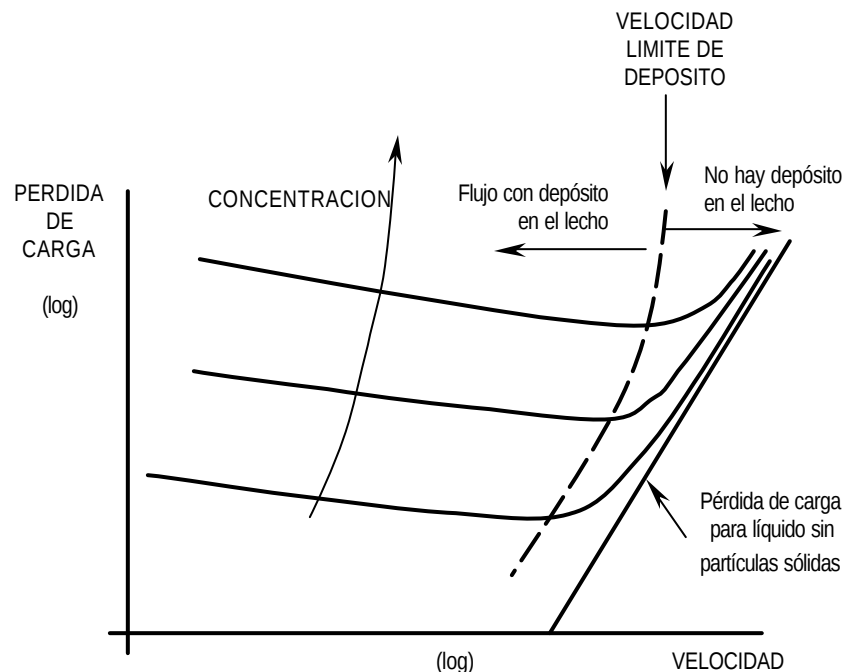


RÉGIMEN HETEROGÉNEO

Este tipo de régimen se da cuando las partículas sólidas son más grandes o de mayor densidad que las partículas de suspensiones homogéneas, o bien cuando la velocidad media del flujo es tal que permite una separación de las partículas sólidas del líquido. Estas partículas no alteran las propiedades rheológicas del fluido que las transporta. Este régimen es el de mayor aplicación en la industria y ha sido de numerosos estudios, los que debido a la complejidad del fenómeno, en su mayoría son experimentales.

En el régimen heterogéneo, las partículas no interactúan química ni eléctricamente entre sí o con el líquido, existe una distribución de concentración en cualquier sección transversal de la tubería y no se depositan las partículas sólidas en el fondo de la tubería.

Una característica importante de este régimen la muestra un diagrama log-log de la pérdida de carga en función de la velocidad media de la mezcla, el que tiene la forma típica de la figura siguiente:



Se aprecia que existe una velocidad de la mezcla para la cual la caída de presión es mínima. Este mínimo se produce con la menor velocidad para la



cual no se forman depósitos en la tubería, razón por la cual la pérdida aumenta para velocidades del flujo menores a la asociada al mínimo de la curva. De este modo, la velocidad óptima del flujo, al menos desde el punto de vista de la energía, debe estar cerca de la que genera el mínimo de pérdida de carga.

Velocidad Límite de Depósito

La definición e identificación de la velocidad a la cual comienzan a depositarse las partículas, ha significado diferentes cosas a diferentes autores. Es así como Thomas definió una *velocidad de transporte mínima* como la velocidad a la cual una capa de partículas fijas o resbalando aparece en el fondo de la tubería. Durand definió una *velocidad límite de depósito*, que él identificaba por la aparición de un *régimen de depósito* en la tubería. Graf y colaboradores definieron una *velocidad de depósito crítica* como la velocidad a la cual las partículas sólidas dejaban de estar suspendidas para formar un lecho estacionario.

Las relaciones de cálculo obtenidas para la velocidad límite de depósito han buscado correlacionarla con algunos de los siguientes hechos (Shook y Roco, 1991):

- identificación del mínimo en estudios experimentales de la pérdida carga
- fluctuación de velocidades de las partículas sólidas
- equilibrio de fuerzas en la primera capa de partículas que se forma en la tubería
- distribución de velocidades de las partículas sólidas cerca del fondo de la tubería. La presencia de un punto de inflexión caracteriza el régimen de flujo crítico.

Faddick propone un criterio práctico para asegurar que una mezcla se mueva en un régimen heterogéneo. Según él, hay que asegurar que el flujo sea turbulento ($VD/n > 4000$) y que la partícula esté en el rango de Newton ($w_s D/n > 1000$).

Según Newitt et al. (1955), la velocidad media mínima de la mezcla para tener régimen heterogéneo está dada por:

$$\frac{w_s}{V} = \frac{1}{17}$$



Durand (1953), de experiencias con mezclas de arena o carbón con agua obtuvo

$$V_L = F_L \sqrt{2gD(S-1)}$$

donde F_L es una función de la concentración ($c < 0,15$) y el tamaño de la partícula, que Durand presentó en forma gráfica. Es más fácil interpretar la relación al escribirla en forma adimensional:

$$\frac{V_L}{\sqrt{2gD(S-1)}} = F_L$$

Mc Elvain y Cave (1972) presentan un gráfico alternativo para determinar F_L , llegando a $c = 0,3$. Fuentes (1994) reporta la modificación que hizo Rayo a los resultados de McElain y Cave, basado en su experiencia profesional. Rayo (1993), apoyado en antecedentes empíricos corrige el coeficiente F_L de Mc Elvain y Cave, según consideraciones adicionales. Denotando por F_{L-Mc} el valor original para F_L , los valores corregidos son los siguientes:

Para pulpas de partículas finas, de granulometría uniforme y tuberías diámetros pequeño, Rayo aconseja usar

$$F_L = 1,1F_{L-Mc} (S-1)^{\frac{1}{5}}$$

Para pulpas de granulometría gruesa, extendida y tuberías de diámetros pequeño, Rayo aconseja usar

$$F_L = F_{L-Mc} \left(\frac{d_{80}}{d_{50}} \right)^{\frac{1}{10}}$$

Para pulpas de partículas finas, de granulometría uniforme y tuberías diámetros grande, Rayo aconseja usar

$$F_L = 1,25F_{L-Mc} \left(\sqrt{2gD(S-1)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Hay que notar que esta última corrección no es dimensionalmente homogénea.



Wasp et al. (1977), al incluir datos publicados por otros autores, mejoró la relación de Durand al incorporar el tamaño relativo de las partículas, d/D , resultando la relación:

$$V_L = F'_L \sqrt{2gD(S-1)} \left(\frac{d}{D} \right)^{\frac{1}{6}}$$

donde F'_L es una función de la concentración, la que los autores presentan en forma gráfica. Dentro de la base de datos usada para definir la expresión anterior se incluye suspensiones de fierro. Un ajuste a la relación gráfica para F'_L es:

$$F'_L = 1,15 c_{\%}^{0,2275}$$

donde $c_{\%}$ es la concentración volumétrica en %.

Spells (1955), para mezclas de partículas pequeñas ($d < 1$ mm) y usando datos publicados por otros investigadores propone:

$$\frac{V_L^2}{gd(S-1)} = 0,0251 \left(\frac{V_L D r_m}{m_m} \right)^{0,775}$$

Utilizando la definición de Fr_{dp} y Re_{mp} introducida en 9.1.-, la condición de Spells se escribe como $Fr_{dp} = 0,049 Re_{mp}^{0,633}$.

Zandi y Govatos (1967) buscaron un parámetro adimensional que permitiera definir si el régimen era heterogéneo o no. Analizando las variables que condicionan el tipo de régimen y que sean posibles de medir, concluyen que las más importantes son: d , D , V , r , r_s , c , g y m . El efecto de d , r , r_s , g y m pueden contemplarse dentro del coeficiente de arrastre hidrodinámico, C_D , por lo que las variables se reducen a C_D , D , c y V . Con el fin de obtener un indicador del régimen, es lógico esperar que el efecto que tienen en él V y C_D es inverso al que tienen D y c , por lo que suponen

que la combinación $\frac{V^2 \sqrt{C_D}}{cD}$ podría usarse como un índice del régimen.

Con el objeto de generar un parámetro adimensional y tomar en cuenta las densidades de las fases involucradas, Zandi y Govatos proponen el siguiente *índice de régimen del flujo*, N_I :



$$N_I = \frac{V^2 \sqrt{C_D}}{c D g (S - 1)}$$

Para determinar el valor del índice N_I , Zandi y Govatos realizaron un monumental trabajo de recopilación, revisión y selección de datos obtenidos en distintas investigaciones, logrando recopilar 2549 datos, los cuales se redujeron a 1452 después de eliminar posible duplicación de la información, variación grosera en la tendencia, discrepancias con los valores reportados en las fuentes originales, y datos que parecían sospechosos. De los datos restantes, 462 fueron eliminados por pertenecer a flujos con un régimen de saltación o lecho estacionario. Los 990 datos que quedaron, y que Zandi y Govatos consideran que están en el régimen heterogéneo cumplen que $N_I \geq 40$. Para índices bajo este valor, el flujo tendrá un régimen de saltación.

Larsen, en una discusión al trabajo de Zandi y Govatos, propuso en 1968 el valor $N_I = 17,8$. Babcock en 1971 presentó una revisión crítica de los datos de Durand, obteniendo $N_I = 10$ (Turian y Yuan, 1977, Kökpinar y Gögüs, 2001).

Como una guía para estimar la velocidad crítica de depósito, Charles (1970) propone:

$$\frac{V_L}{\sqrt{g D (S - 1)}} = 4,80 \frac{1}{C_D} \left(\frac{c}{c(S - 1) + 1} \right)^{\frac{1}{3}}$$

En la deducción de la relación anterior, Charles consideró flujo turbulento en pared hidrodinámicamente lisa (ecuación de Blasius para el factor de fricción). La deducción se hace imponiendo la condición de mínimo de la pérdida de carga, la que fue determinada en un trabajo previo. La ecuación para la pérdida de carga se correlaciona muy bien para mezclas de agua y arena ($S = 2,65$), pero tiende a discrepar para níquel-agua ($S = 8,9$). Además, los puntos experimentales con que se comparó la ecuación para la pérdida de carga correspondían a un experimento con níquel-agua y al promedio de más de 500 ensayos de mezclas arena-agua. Charles indica que su ecuación debe usarse con cautela para concentraciones mayores a 0,25. Si V_L se usará para material de granulometría extendida, el coeficiente de arrastre C_D debe evaluarse para el tamaño de partícula más grande presente en la mezcla.

Oroscar y Turian (1980) derivaron una correlación con datos que incluye pocos resultados para partículas grandes, estando la mayoría bajo 0,5



mm. La base de datos incluye flujos con régimen laminar y líquidos de alta viscosidad. La correlación es:

$$\frac{V_L}{\sqrt{gd(S-1)}} = 1,85c^{0,1536}(1-c)^{0,3564}\left(\frac{D}{d}\right)^{0,378} Re_p^{0,09} X^{0,30}$$

donde

$$Re_p = \frac{rD\sqrt{gd(S-1)}}{m}.$$

r , m y S corresponden al líquido (no al fluido equivalente formado por el líquido más los finos).

$$X = \frac{2}{\sqrt{p}} \left[\frac{2}{\sqrt{p}} g \exp\left(-\frac{4g^2}{p}\right) + \int_g^\infty \exp\left(-\frac{4g^2}{p}\right) dg \right]$$

con $g = w_s/V_L$. La velocidad de sedimentación debe estar corregida por efecto de concentración.

La velocidad límite de depósito, V_L , no puede despejarse explícitamente de la relación de Oroskar y Turian, por lo que es necesario proceder mediante algún método iterativo. Generalmente $g = w_s/V_L < 0,5$, por lo que $X \sim 0,9 - 1,0$ y $X^{0,3} \sim 1$. Shook y Roco (1991) indican que la relación de Oroskar y Turian no es muy confiable para partículas grandes en tuberías grandes.

Gillies (Shook y Roco, 1991) derivó una correlación obtenida con tuberías de hasta 50 cm de diámetro y pulpas acuosas, con viscosidades entre 0,5 y 5 centipoise. Emplea un fluido equivalente formado por el líquido más el material fino de la curva granulométrica. La densidad del fluido equivalente está dada por:

$$r_f = \frac{r_s c_f + r(1-c)}{1-c+c_f}$$

donde c_f es la concentración de los finos.

La velocidad límite de depósito se expresa en términos de la función F de Durand:



$$\frac{V_L}{\sqrt{gD \left(\frac{r_s}{r_f} - 1 \right)}} = F$$

donde

$$F = \exp(0.51 - 0.0073C_D - 12.5K_2)$$

$$K_2 = (K_1 - 0.14)^2 \quad K_1 = \left(\frac{m^2}{r^2 g d_{50}^3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

d_{50} se calcula de la fracción gruesa resultante de restar los finos a la curva granulométrica. C_D se determina para d_{50} . K_1 contiene las propiedades del líquido, no las del fluido equivalente.

En otro estudio, Gögüs y Köpkinar (1993) obtuvieron:

$$\frac{V_L}{\sqrt{gD}} = 0.124 \left(\frac{D}{d} \right)^{0.537} c^{0.322} (S - 1)^{0.121} \left(\frac{r w_s d}{m} \right)^{0.243}$$

w_s es la velocidad de sedimentación de la partícula aislada en un medio infinito. En un estudio posterior, en el que además de buscar una versión mejorada de la expresión anterior, Köpkinar y Gögüs (2001) hacen una comparación con las de Durand, Yufin (obtenida de ASCE, 1975) y Zandi y Govatos, obtienen:

$$\frac{V_L}{\sqrt{gD}} = 0.055 \left(\frac{D}{d} \right)^{0.60} c^{0.27} (S - 1)^{0.07} \left(\frac{r w_m d}{m} \right)^{0.30}$$

donde w_m es la velocidad de sedimentación de la partícula corregida por efecto de la concentración. El rango de las distintas variables para la que se obtuvo la relación anterior es el siguiente: $0.23 \leq d \leq 5.34$ mm; $1.04 \leq S \leq 2.68$; $25.4 \leq D \leq 152.4$ mm y $0.0075 \leq c \leq 0.30$. El líquido utilizado fue agua pura.

Como resultado de la comparación de cómo se ajusta las distintas relaciones de cálculo con todos los datos experimentales (propios y de los otros autores), Köpkinar y Gögüs concluyen que la mejor precisión se



obtiene con la relación por ellos propuesta, seguida por la que propusieron en 1993, le sigue la de Durand, luego la de Yufin y, por último, la de Zandi y Govatos. No es de extrañar que la ellos y la de Durand tengan mejores ajustes, ya que fueron deducidas para el mismo rango de datos. Si bien es cierto que Zandi y Govatos no se comporta tan bien como las otras, el banco de datos usado es mucho mayor, así como el rango de datos. Con toda seguridad, si se aplica las relaciones de Kökpinar y Gögüs sedimentos más pesados y partículas más finas, se llegará a la misma conclusión que obtuvieron, por ejemplo, Ellis and Round (1963) y Murphy et al. (1954). Los dos primeros investigadores trabajaron con partículas de níquel ($S = 8,9$ y $d = 106 \mu\text{m}$) y los últimos con ocho materiales distintos, entre los que se incluía vidrio, acero y plomo. La conclusión es que la expresión de Durand es insatisfactoria.

Extraña (por decir lo menos) la baja incidencia del peso específico relativo en las expresiones de Kökpinar y Gögüs, probablemente es un resultado del estrecho rango de variación de la densidad de los sólidos utilizados.

Wasp et al. también presentan las relaciones derivadas por Thomas, las que no suministran la velocidad límite del flujo, sino la velocidad friccional límite, la que a su vez depende del espesor de la subcapa viscosa, d_v , que se genera en la tubería, el que está dado por $\frac{d_v u_*}{n} = 11,6$. A partir de mezclas con esferas de vidrios, Thomas obtuvo:

Si $d > d_v$:

$$\frac{w_s}{u_{*Lo}} = 4,9 \left(\frac{u_{*Lo} d}{n} \right) \left(\frac{n}{u_{*Lo} D} \right)^{0,60} (S - 1)^{0,23}$$

$$\frac{u_{*Lc}}{u_{*Lo}} = 1 + 2,8 \sqrt{c} \left(\frac{w_s}{u_{*Lo}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

donde w_s es la velocidad de sedimentación de una partícula aislada en un medio infinito, u_{*Lo} es la velocidad friccional límite de depósito sin efectos de concentración y u_{*Lc} es la velocidad friccional límite, corregida por efecto de la concentración de la pulpa.

Si $d < d_v$ y la suspensión es diluida ($c < 0,18$):

$$\frac{w_s}{u_*} = 4,9 \left(\frac{u_* d}{n} \right)^{2,71}$$



La dificultad de las relaciones anteriores está en el hecho que dependen de la velocidad friccional la que no se conoce a priori, ya que ella depende de la pérdida de carga de la mezcla (cuyo cálculo se verá más adelante).

Pérdida de Carga en el Régimen Heterogéneo

Para el cálculo de la pérdida de carga se han propuesto numerosas correlaciones empíricas y consideran que el gradiente de energía necesario para mantener el flujo de la mezcla se compone de dos términos: uno debido al gradiente de energía requerido para mantener el flujo turbulento del líquido y otro necesario para mantener las partículas en suspensión:

$$J_m = J_L + J_s$$

donde J_m es la pérdida de carga de la mezcla, J_L es la pérdida de carga del líquido y J_s es la pérdida de carga asociada a los sólidos. Tanto J_L como J_s y J_m se expresan en *metros de columna de líquido por metro de tubería* y se evalúan para la velocidad de la mezcla, V . Usualmente J_L se calcula a partir de la ecuación de Darcy-Weisbach.

Uno de los primeros estudios para cuantificar la pérdida de carga en régimen heterogéneo fue el realizado por Durand y sus colaboradores. En su trabajo de 1953, Durand, considera que la pérdida debido a los sólidos es proporcional a la del líquido por la concentración de sólidos. Llamando F al coeficiente de proporcionalidad: $J_s = FcJ_L$, de donde resulta:

$$F = \frac{J_m - J_L}{cJ_L}$$



APROXIMACIÓN DEL FLUJO PSEUDO-HOMOGÉNEO

De hacer un equilibrio de fuerzas en la tubería, resulta que el esfuerzo de corte se liga a la pérdida de carga unitaria mediante la relación $t_{pared} = rgRJ$, donde R es el radio hidráulico. Esta expresión es general, independiente del tipo de fluido o régimen de flujo. El esfuerzo de corte sobre la pared debido a la acción del fluido está dado por $t_{pared-L} = rgRJ_L$ y el esfuerzo debido a la mezcla es $t_{pared-m} = rgRJ_m$. Notar que tanto el esfuerzo de la mezcla como la del líquido se calculan a partir de la densidad del fluido. Esto es porque se decidió que las pérdidas de carga se medirían en metros de columna de líquido. Además, por definición, el esfuerzo de corte en la pared se liga con la velocidad friccional por la relación $t_{pared} = ru_*^2$. La velocidad friccional a su vez se puede relacionar con la velocidad media del flujo mediante el factor de fricción $\frac{u_*}{V} = \sqrt{\frac{f}{2}}$. De este modo, es posible los esfuerzos de corte sobre la pared asociados a la mezcla y al líquido como $t_{pared-m} = \frac{1}{2} r_m f_m V^2$ y $t_{pared-L} = \frac{1}{2} r_L f_L V^2$, respectivamente. Notar que los esfuerzos de corte se evalúan con las densidades y factores de fricción de la mezcla o del líquido, según corresponda. Despejando J en función de t y expresando el esfuerzo de corte en función de f , resulta para el coeficiente de proporcionalidad F :

$$F = \frac{\frac{r_m}{r_L} f_m - f_L}{cf_L}$$

Al reemplazar la densidad de la mezcla $r_m = cr_s + (1-c)r_L$ en la relación para F , queda:

$$F = \frac{(1+c(S-1))f_m - f_L}{cf_L}$$

Consideremos ahora el caso de una mezcla *verdaderamente* homogénea. En ella no habría diferencia entre factores de fricción y en tal caso, el coeficiente F queda:

$$F = S - 1$$



La aproximación que conduce a $F = S - 1$ es llamada a veces *aproximación del flujo pseudo-homogéneo*, y es una condición a la que deberían satisfacer las relaciones de cálculo de la pérdida de energía, para las condiciones límites adecuadas. Como se verá más adelante, muy pocas de las relaciones propuestas satisfacen esta condición.

Relaciones de Cálculo

Durand (1953) reportó los resultados de experimentos en los que usó arena, gravilla y carbón de tamaño uniforme (tamaño de 0,2 a 25 mm), tuberías de paredes lisas y rugosas, de diámetros entre 40 y 580 mm y concentraciones entre 2 y 23% (60 a 600 mg/l). Considerando 310 puntos experimentales, concluyó que la pérdida de carga estaba dada por:

$$\frac{J_m - J_L}{cJ_L} = K \left[\frac{V^2 \sqrt{C_D}}{gD} \right]^{-3/2}$$

El coeficiente de proporcionalidad no fue evaluado por Durand.

Posteriormente, Condolios y Chapus (1963), con materiales de densidad relativa igual a 2,65, propuso $K = 180$.

Zandi y Govatos, considerando de 1452 datos experimentales obtenidos por distintos investigadores, concluyen que el mejor ajuste a todos los puntos se produce con $K = 81$.

La relación de Durand no depende explícitamente del efecto de la densidad relativa del material. Para incluir este efecto, Durand y Condolios presentan una versión modificada de la relación original de Durand:

$$\frac{J_m - J_L}{cJ_L} = 81 \left[\frac{V^2 \sqrt{C_D}}{gD(S - 1)} \right]^{-3/2}$$

El parámetro adimensional en paréntesis ha resultado fundamental para el estudio empírico del transporte hidráulico de sólidos en tuberías y a partir de Zandi y Govatos, se le denota como Y :

$$Y = \frac{V^2 \sqrt{C_D}}{gD(S - 1)}$$



Charles observó que, llevar al límite $Y \rightarrow \infty$, que corresponde a hacer la aproximación del flujo pseudo-homogéneo, la relación de Durand y Condolios tiende a $(S - 1)$ no tiende a cero, de tal manera que propuso una relación que satisficiera que $F \rightarrow 0$ cuando $Y \rightarrow \infty$, obteniendo:

$$F = 120Y^{-3/2} + (S - 1)$$

La relación de Charles fue obtenida a partir de experiencias con arena y partículas de níquel en una tubería de 1 pulgada de diámetro y concentraciones menores a 20%.

Newitt et al. (1955), de experimentos con arena y gravilla en una tubería de 2,5 cm de diámetro, obtienen 135 puntos experimentales de los que obtiene la correlación:

$$\frac{J_m - J_L}{cJ_L} = 1100 \frac{gDw_s}{V^3} (S - 1)$$

Según los autores, la relación anterior es válida en el rango $17 w_s < V < (1800gDw_s)^{1/3}$.

Zandi y Govatos fueron los primeros en emprender la tarea de reunir todos los datos disponibles respecto al transporte hidráulico de sólidos, analizarlos y seleccionarlos con el fin de verificar la validez de la relación de Durand. Su conclusión fue que ella no representa bien todo el rango experimenta y propusieron una relación que minimiza la dispersión de los datos. Obtuvieron:

$$F = 6,3Y^{-0,354} \quad , \quad Y > 10$$

$$F = 280Y^{-1,93} \quad , \quad Y < 10$$

Relaciones Para Granulometría Extendida

Las correlaciones presentadas anteriormente no toman en cuenta la distribución granulométrica del material particulado y, en general, han sido deducidas para material de tamaño uniforme.

Condolios y Chapus (1963), estudiaron cómo incluir el efecto de una granulometría extendida en la relación de Durand y llegaron a la



conclusión que un material que no es uniforme, no se caracteriza ni por su tamaño medio ni por el promedio ponderado de las velocidades de sedimentación, sino por el promedio ponderado de la raíz de los coeficientes de arrastre:

$$\sqrt{C_D} = \sum p_i \sqrt{C_{Di}}$$

donde p_i es el porcentaje de la fracción granulométrica caracterizada por el diámetro d_i y C_{Di} es el coeficiente de arrastre para la partícula de ese diámetro.

Wasp et al. (1977) objetan el criterio de anterior e indican que debe calcularse la pérdida de carga J_i para cada tamaño d_i , considerando la concentración c_i que tiene ese tamaño en la mezcla. La pérdida de la mezcla es la suma de la pérdida asociada a cada tamaño:

$$J = \sum J_i$$

Shook y Roco (1991) calculan un coeficiente arrastre de la mezcla mediante un promedio armónico:

$$\frac{1}{C_D} = \sum \frac{p_i}{C_{Di}}$$

y dejan el panorama tan oscuro como hace 30 años al decir que el método empírico que ellos proponen “parece ser tan bueno como cualquier otro” (pág. 104).

Rheología del Líquido

En general, casi todas las relaciones que se han presentado fueron deducidas usando agua como líquido y muy pocas han usado otro fluido. A menos que la relación explícitamente indique lo contrario, su uso está restringido a fluidos newtonianos. Debido a que no se ha tenido acceso a todos los artículos originales y muchas ecuaciones han sido obtenidas por las referencias que de ellas se hacen en otros artículos o libros, no es posible saber cuál es el rango de aplicación de la fórmula y, en particular, si es extensible a fluidos no-newtonianos. Esta restricción tiene especial interés cuando se tiene material particulado que comprende material fino y grueso, de tal manera que la mezcla de fino con el líquido pueda considerarse como un fluido equivalente que transporta el material grueso.



Ya se ha indicado que al aumentar la concentración de fino aumenta la viscosidad de la mezcla y puede, incluso, cambiar el comportamiento rheológico respecto a la del líquido original.

Una relación que ha sido deducida con la fase líquida comportándose como fluido newtoniano o plástico de Bingham es la de Takaoka et al. (1986). Fue obtenida de experimentos con tres arenas de tamaños medio y máximo de (0,026; 7,2), (0,132; 4,0) y (0,77; 20,0) mm, y peso específico 2,36; 2,43 y 2,68 gr/cm³, respectivamente. La cantidad bajo tamaño 37 micrones de las dos primeras arenas era 59,2 y 20,9 %, mientras que la tercera no contenía ese material fino. La tubería utilizada tenía un diámetro de 78,8 mm. Las concentraciones estuvieron en el rango de 3 a 24 %. La relación es:

$$F = 120Y^{-1,5} + \sqrt{S} - 1$$



RÉGIMEN INTERMEDIO (SUSPENSIONES HETERO-HOMOGÉNEAS)

Este régimen se da cuando coexisten las suspensiones homogénea y heterogénea. La ocurrencia simultánea de estas dos suspensiones es posible cuando se tiene granulometrías de partículas finas y gruesas. Las partículas más finas forman una mezcla homogénea y las más gruesas o pesadas muestran una distribución de concentración en la vertical. Pese a que desde el punto de vista industrial este tipo de mezclas es el más frecuente, no son muchos los trabajos realizados en esta área.

La velocidad límite de depósito para el régimen intermedio es menor que para el régimen heterogéneo, debido a que la presencia de las partículas finas disminuye la velocidad de sedimentación de las partículas más gruesas. No se ha encontrado una ecuación universal que permita predecir La velocidad límite de depósito. A falta de una alternativa mejor, puede estimarse a partir de observaciones hechas en tuberías de otro diámetro usando la “ley de la raíz cuadrada” (Faddick, 1985):

$$V_L = V_{L-observada} \sqrt{\frac{D}{D_{observado}}}$$

Si no existen velocidades límites observadas, se propone estimar el valor a partir de flujos de mezclas con características similares.

Una de las pocas expresiones para calcular la velocidad límite en el régimen intermedio es la correlación de Gilles (Shook y Roco, 1991), la que ya fue presentada.

La distinción entre partículas finas puede hacerse con el criterio de Faddick: son finas aquellas que están dentro del rango de Stokes y gruesas las que están en el rango de Newton ($C_D = 0,44$).

La determinación de la pérdida de carga está tan poco estudiada como la velocidad límite de depósito. En general, los distintos autores adaptan la expresión de Durand, considerando como medio de transporte no al líquido solo, sino a un fluido equivalente formado por la mezcla líquido-partículas finas y considerando el coeficiente de arrastre equivalente que resulta del criterio de Condolios y Chapus, ponderando el que tiene cada fracción de material sobre el que se considera fino.



El fluido equivalente tiene una densidad y viscosidad que son función de la concentración de finos, c_f . Notar que la densidad relativa S debe reemplazarse ahora por una basada en la densidad del fluido equivalente:

$$S = \frac{r_s}{r} \rightarrow S_{eq} = \frac{r_s}{r_{eq}}$$

RÉGIMEN CON LECHO MÓVIL

Si las fuerzas gravitacionales son mayores que las que hacen que las partículas sólidas se mantengan en suspensión, éstas se depositan en el fondo de la tubería y se trasladan mediante saltos discontinuos, deslizándose o rodando.

Algunas veces este régimen se subdivide en dos: *régimen de saltación* y *régimen de fondo deslizante*. Otras veces se toman como sinónimo y se habla indistintamente de régimen de saltación, fondo deslizante o lecho móvil.

Límite entre el Flujo con Lecho Móvil y el Flujo con Lecho Fijo

El límite cuando un lecho granular se pone en movimiento es un problema clásico de la mecánica fluvial y ha sido ampliamente estudiado en ese ámbito. Existen básicamente dos criterios para definir el *movimiento incipiente*: el criterio de la velocidad crítica y el del esfuerzo de corte crítico. Es difícil extrapolar directamente el criterio de la velocidad crítica derivado en canales al flujo en tuberías.

Criterio del Esfuerzo de Corte Crítico

Este criterio postula que para que una partícula granular en un lecho no-cohesivo se ponga en movimiento, el esfuerzo de corte actuando sobre ella debe ser mayor que un esfuerzo límite, bajo el cual la partícula se mantiene en reposo. Este esfuerzo límite se denomina *esfuerzo de corte crítico*, t_c . El esfuerzo de corte actuando sobre una partícula en el lecho y expuesta al flujo, puede calcularse a partir de

$$t_b = r_L g R J_L$$

donde R es el radio hidráulico de la sección de escurrimiento ($R = D/4$). La partícula estará en movimiento si, $t_b > t_c$.



La relación clásica para el cálculo del esfuerzo de corte crítico es la de Shields en la que se utiliza el adimensional conocido *parámetro de Shields*:

$$q = \frac{t_b}{(S-1)r_L g d}$$

En la condición crítica, $t_b = t_c$ y $q = q_c$. Mediante un simple equilibrio de fuerzas y consideraciones de análisis dimensional, Shields obtuvo que q_c debía ser función del número de Reynolds de la partícula, definido como

$Re_* = \frac{u_* d}{n}$, donde n es la viscosidad del líquido y u_* es la velocidad friccional, evaluada en la condición crítica.

Shields experimentó con partículas de ámbar ($r_s = 1,06 \text{ g/m}^3$), lignita o carbón café ($r_s = 1,27 \text{ g/m}^3$), granito ($r_s = 2,7 \text{ g/m}^3$) y barita ($r_s = 4,25 \text{ g/m}^3$) y el resultado se presenta en la forma de un gráfico de q_c en función de Re_* (*diagrama de Shields*), el que se muestra a continuación.

El resultado de Shields ha sido verificado posteriormente utilizando perdigones de acero ($r_s = 7,9 \text{ g/m}^3$), vidrio ($r_s = \text{g/m}^3$) y una amplia gama de arenas ($r_s = 2,1 - 2,65 \text{ g/m}^3$) y usando como fluido agua, petróleo, glicerina y aire, entre otro.

El diagrama de Shields no es práctico cuando se desea conocer el esfuerzo de corte crítico, ya que esa variable aparece tanto en q_c como en Re_* , debiendo procederse de manera iterativa. Para facilitar los cálculos conviene transformar el diagrama de Shields en otro, en el que q_c dependa sólo de las propiedades de la partícula y del fluido. Ello se logra al generar

una nueva variable adimensional: $P = \frac{Re_*^2}{q_c} = \frac{Sgd^3}{n^2}$. De este modo, se fabrica una relación gráfica entre q_c y P .

Definiendo $d_* = P^{1/3}$, Bonnefille (1963) presentó las siguientes relaciones explícitas para determinar t_c (a partir de Re_*):

$$\begin{aligned} d_* &= 2,33 Re_*^{0,79} & , & Re_* \\ d_* &= 2,33 Re_*^{0,85} & , & 1 < Re_* < 5 \\ d_* &= 2,78 Re_*^{0,85} & , & 5 < Re_* < 5 \\ d_* &= 3,96 Re_*^{0,584} & , & 10 < Re_* < 100 \end{aligned}$$



Para $Re^* \geq 100$, $q_c \approx 0,05$. Para valores de $Re^* \geq 100$ Shields obtuvo un valor de 0,060 para el esfuerzo crítico adimensional. Este valor presenta cierta dispersión entre 0,047 y 0,06. El valor más bajo corresponde a material no-uniforme (Gessler, 1971).

El esfuerzo de Shields crítico para un lecho inclinado un ángulo α , $q_{c,\alpha}$ está dado por:

$$q_{c,\alpha} = q_c \cos \alpha \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\tan j} \right)$$

donde j es el ángulo de reposo del material granular.

En su origen, la relación de Shields fue deducido para canales y aunque no existe mucha investigación respecto a su validez en tuberías, parece ser aplicable.

Criterio de la Velocidad Crítica

El concepto es análogo al del esfuerzo de corte crítico: Es la velocidad media del flujo que hace las partículas del lecho expuestas al flujo, entren en movimiento. Se han desarrollado muchas expresiones para canales, algunas con una base más o menos teórica y otras solamente empíricas.

Entre las más conocidas fórmulas para la velocidad crítica V_c en canales es la de Neill:

$$\frac{V_c^2}{(S-1)gd} = 2 \left(\frac{h}{d} \right)^{1/3}$$

donde h es la altura normal de escurrimiento. La fórmula de Neill se dedujo para materia uniforme grueso.

Wilson en 1985 estudió la condición de suspensión de partículas en tuberías y obtuvo (Wan y Wang, 1994, p.151):

$$\frac{w_s}{V_s} = 1,67 \exp \left(-0,45 \frac{d}{D} \right) \sqrt{\frac{f_c}{8}}$$

donde V_s es la velocidad del flujo para la cual comienza la suspensión de partículas y f_c el factor de fricción de Colebrook-White. Notar que la definición de V_s no es la de velocidad crítica.



Pérdida de Carga en el Régimen con Lecho Móvil

Newitt et al. (1955) determinaron la siguiente relación para calcular la pérdida de energía en flujos de mezclas en el régimen de lecho móvil.

$$\frac{J - J_L}{cJ_L} = 66(S - 1) \frac{gD}{V^2}$$

Babcock en 1970, de experimentos con arena gruesa y partículas de acero, de tamaño superior a 0,6 mm y tubería de 1 pulgada de diámetro propuso:

$$\frac{J_m - J_L}{cJ_L} = 60,6 \frac{gD}{V^2} (S - 1)$$

Graf y Acaroglu (Graf, 1971) definen las variables adimensionales:

$$F_A = \frac{cVR}{d\sqrt{(S-1)gd}} \quad Y_A = \frac{(S-1)d}{JR}$$

Considerando una relativamente extensa base de datos tomados por Acaroglu y otros investigadores proponen:

$$F_A = 10,39Y_A^{-3,52}$$

RÉGIMEN CON LECHO FIJO

Si la capacidad de arrastre del flujo es muy baja, puede suceder que las partículas no se muevan, y se tenga un lecho fijo. En caso de tener una granulometría extendida, el lecho fijo puede estar formado por las partículas más gruesas y el material fino seguir en suspensión. Este régimen se trata de evitar, ya que su capacidad de transporte es prácticamente nulo, las pérdidas de energía aumentan y tiende a producir bloqueos en la tubería.

Según Durand y Condolios, si el depósito de partículas en el fondo es tal que éste se mantiene liso, la pérdida de carga puede determinarse de:



$$\frac{J - J_L}{cJ_L} = 180 \left(\frac{V_{real}}{4gR_{real}} \sqrt{C_D} \right)^{-3/2}$$

donde V_{real} y R_{real} corresponden a la velocidad media de la mezcla y el radio hidráulico, respectivamente, ambos calculados con la *sección real* de escurrimiento. Condolios y Chapus (1963) sugieren calcular J de la expresión de Darcy-Weisbach:

$$J_L = \frac{f}{4R} \frac{V_{real}^2}{2g}$$

donde f es el factor de fricción de Colebrook-White.

Los autores no presentan una metodología para poder determinar el área efectiva de escurrimiento a partir de las variables independientes del problema, por lo que, en la práctica, las relaciones anteriores no pueden aplicarse.

CORRELACIONES OBTENIDAS DE EXPERIENCIAS QUE CUBREN TODOS LOS RÉGIMENES

Por su interés, se presentan en un punto aparte correlaciones obtenidas a partir de bases de datos amplias y que cubren todos los regímenes de flujo. La importancia de estas correlaciones es que el análisis forma un todo coherente en todos los regímenes. Las relaciones a presentar son las de Newitt et al. (1955), las que ya se han mostrado por separado, al analizar cada régimen y la de Turian y Yuan (1977).

Newitt et al. (1955) utilizaron en sus experimentos arena y gravilla en un de tamaños rango que iba desde bajo 66 μm a 4,76 mm, con densidades entre 1,18 y 4,6 gr/cm^3 en una tubería de 2,54 cm de diámetro. El líquido era agua. De un total de 135 puntos experimentales, ellos desarrollaron las siguientes relaciones:

Régimen homogéneo: $V \geq (1800 gDw_s)^{1/3}$

$$\frac{J - J_L}{cJ_L} = 0,6(S - 1)$$

Régimen heterogéneo: $(1800 gDw_s)^{1/3} \geq V \geq 17w_s$



$$\frac{J - J_L}{cJ_L} = 1100(S - 1) \frac{gD}{V^2} \frac{w_s}{V}$$

Régimen con lecho móvil: $17 w_s \geq V$

$$\frac{J - J_L}{cJ_L} = 66(S - 1) \frac{gD}{V^2}$$

Las velocidades que delimitan cada régimen se obtuvieron igualando las expresiones para la pérdida de carga en cada régimen.

Turian y Yuan (1977) obtuvieron sus correlaciones del análisis de 2848 puntos experimentales. De éstos, 1912 fueron recogidos de la literatura y los 936 restantes de las experiencias de los autores. Los datos que no eran propios cubren 18 investigaciones reportadas entre 1906 y 1965, las que se realizaron con partículas de los siguientes materiales: arena, gravilla, níquel, carbón, mineral de cobre, vidrio, acero, plomo y madera. Las tuberías tenían diámetros entre 1,26 y 70 cm. Las experiencias de Turian y Yuan se realizaron con agua como fluido, en tuberías de 1,27; 2,54 y 5,08 cm de diámetro. El material particulado consistía en esferas de vidrio de densidades entre 2,42 y 4,40 gr/cm³, tamaños medios entre 29,6 µm y 4,38 mm. El rango de concentraciones de todos los datos era de 0,6 a 42%. De todas los datos analizados, sólo 16 corresponden a tuberías de 58 y 70 cm. El resto (2832) se obtuvo en tuberías de 15 cm o menor

Turian y Yuan distinguen cuatro regímenes de flujo, a los que les asignó un código, de acuerdo a la tabla siguiente:

REGIMEN	CODIGO
Lecho estacionario	0
Saltación	1
Heterogéneo	2
Homogéneo	3

La pérdida de energía asociada a la mezcla se expresa en términos de la densidad del líquido y un factor de fricción de Fanning de la mezcla:

$$Jrg = \frac{2fV^2r}{D}$$



El factor de fricción de la mezcla se liga a la del líquido escurriendo a la misma velocidad en la misma tubería a través de:

$$f - f_L = Kc^a f_L^b C_D^g \left(\frac{V^2}{gD(S-1)} \right)^d$$

El coeficiente de arrastre corresponde al de una esfera aislada que cae en un medio infinito. El coeficiente K y los exponentes a , b , g y d dependen de cada régimen y se dan en la tabla siguiente:

COEFICIENTE K Y EXPONENTES PARA EL CALCULO
DEL FACTOR DE FRICCION

CODIGO	K	a	b	g	d
0	0,4036	0,7389	0,7717	-0,4054	-1,096
1	0,9857	1,018	1,046	-0,4213	-1,354
2	0,5513	0,8687	1,200	-0,1677	-0,6938
3	0,8444	0,5024	1,428	0,1516	-0,3531

La delimitación del tipo de régimen se hace mediante el signo que toman ciertos *números de régimen*, R_{ij} , que los autores definen a partir de:

$$R_{ij} = \frac{V^2}{K_1 c^{a_1} f_L^{b_1} C_D^{g_1} gD(S-1)}$$

El coeficiente y los exponentes que definen el número de régimen se dan en la siguiente tabla:

PARAMETROS QUE DEFINEN AL NUMERO DE REGIMEN

NUMERO DE REGIMEN	K_1	a_1	β_1	γ_1
R_{01}	31,93	1,083	1,064	-0,0616
R_{12}	2,411	0,2263	-0,2334	-0,3840
R_{23}	0,2859	1,075	-0,67	-0,9375
R_{13}	1,167	0,5153	-0,382	-0,5724
R_{02}	0,4608	-0,3225	-1,065	-0,5906
R_{03}	0,3703	0,3183	-0,8837	-0,7496



La forma de definir los criterios de separación entre regímenes es igual a como lo hicieron Newitt et al., o sea, igualando las expresiones de la pérdida para dos regímenes contiguos. De este modo, la ecuación para R_{ij} no es más que la razón entre la velocidad de la mezcla y la velocidad límite que separa dos regímenes, de tal manera que:

- $R_{ab} = 1$, define la curva que separa los regímenes a y b
- $R_{ab} > 1$, corresponde al régimen de flujo más rápido
- $R_{ab} < 1$, corresponde al régimen de flujo más lento

Para establecer el régimen de flujo, debe determinarse el signo de $(R_{ij} - 1)$, para $i = 0, 1, 2$ y $j = 1, 2, 3$ establecer el régimen de la tabla con los criterios para la delineación de los regímenes de flujo que se presenta más adelante.

CRITERIO PARA DEFINIR EL REGIMEN DE FLUJO

R_{01-1}	R_{12-1}	R_{23-1}	R_{02-1}	R_{03-1}	R_{13-1}	CODIGO
-	-	-				0
+	-	-				1
+	+	-				2
+	+	+				3
-	-	+		-		0
-	-	+		+		3
-	+	+		-		0
-	+	+		+		3
-	+	-	-			0
-	+	-	+			2
+	-	+			-	1
+	-	+			+	3

REGIMEN	CODIGO
Lecho estacionario	0
Saltación	1
Heterogéneo	2
Homogéneo	3



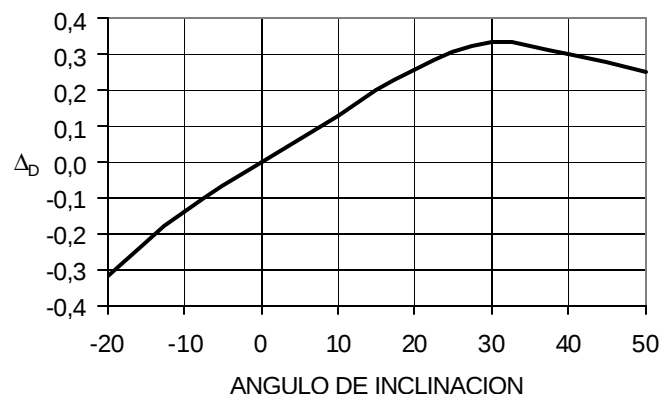
EFFECTO DE LA INCLINACIÓN DE LA TUBERÍA

Varios estudios se han realizado respecto a la dependencia que tiene la inclinación de la tubería en la velocidad de depósito la que, además del ángulo de inclinación depende de la razón d/D y la concentración de sólidos. Este último efecto ha sido estudiado por Roco (1977) en un artículo en el que también aborda el problema de escalamiento. Aunque el artículo está en rumano, se puede seguir las ideas y entender el significado de las fórmulas.

Otro estudio que ha enfrentado el problema es el de Wilson y Tse, citado en el libro de Shook y Roco (1991). Ellos proponen correlacionar la velocidad de depósito como un incremento del que se tiene para una tubería horizontal, a través de una función D_D la que es función del ángulo de inclinación y del tamaño relativo de las partículas, d/D :

$$D_D = \frac{V_L}{\sqrt{gD(S-1)}} \Big|_{\text{inclinada}} - \frac{V_L}{\sqrt{gD(S-1)}} \Big|_{\text{horizontal}}$$

En la figura siguiente se presenta sólo la envolvente superior de los puntos experimentales, que fue obtenida para razones d/D de 0,02, 0,05 y 0,1. Para un ángulo de inclinación dada, D_D disminuye si d/D disminuye. La figura se elaboró a partir del gráfico de Wilson y Tse presentado en Shook y Roco (1991). El ángulo es positivo si la tubería sube.



Respecto a la pérdida, Shook y Roco mencionan que se han reportado mediciones en tuberías de diámetro pequeño ($D < 16$ cm). No se ha propuesto ninguna correlación para la pérdida de carga en tuberías inclinadas, por lo que se utilizan las derivadas en tuberías horizontales.



Hay que tener presente que si el flujo es a velocidades muy bajas, puede tenerse una corriente descendente en la cercanía del fondo de la tubería.

ESCALAMIENTO

En general, mediante análisis dimensional se busca extrapolar los resultados de experimentos bajo condiciones controladas a situaciones de prototipo o diseño. Los complejos fenómenos del flujo son definidos por unos pocos coeficientes empíricos, por lo que la validez de las ecuaciones está limitada a la base de datos, y su extrapolación siempre incluirá un grado de incerteza. Debe tenerse presente el comentario de Roco y Shook (1984) respecto al diseño de nuevas líneas de tuberías, en particular si son largas: “ES NECESARIO REALIZAR EXPERIMENTOS EN CONDICIONES CERCANAS A LA SITUACIÓN REAL, Y TALES ENSAYOS NUNCA SERÁN COMPLETAMENTE SEGUROS”

Velocidad de Depósito

Faddick (1985) indica que *ninguna ecuación para la velocidad de depósito que sea satisfactoria ha sido documentada en la literatura*. El enfoque más seguro es observar la velocidad de depósito para una mezcla dada en una tubería de diámetro pequeño y escalarla a una mayor mediante la “ley de la raíz cuadrada” (para la misma mezcla):

$$\frac{V_L}{V_{L-\text{obseveda}}} = \sqrt{\frac{D}{D_{\text{observado}}}}$$

Si no existe la posibilidad de tener el valor observado, entonces debería recurrirse a alguna de las tantas correlaciones propuestas, cuidando que corresponda a las condiciones más similares posibles a la del flujo de interés. Notar que Faddick menciona el uso de correlaciones sólo como una alternativa al escalamiento a partir de observaciones.

Por su estructura, la relación anterior corresponde a una ley de similitud de Froude.

Roco (1977) propone como ley de escalamiento ($d/D < 1/200$):

$$\frac{V_L}{V_{L-\text{obseveda}}} = \left(\frac{D}{D_{\text{observado}}} \right)^p$$



donde el exponente p toma el valor 0,4 a partir de estudios con mezclas de cenizas, arenas y concentrados de cobre en tuberías de 80, 100, 125,5 y 152 mm de diámetro y concentraciones en peso entre 0,1 y 60% (la concentración en volumen depende del peso específico de cada material). En su estudio, toma como patrón (*observado*) la tubería de 100 mm, para el que presenta su dependencia con la concentración de la mezcla y el ángulo de inclinación de la tubería.

Notar que este criterio de escalamiento no puede hacerse con tuberías de tamaños demasiado grandes, de tal manera que en ambas tuberías dominen los mismos fenómenos del flujo.

Pérdida de Carga

Para el escalamiento de la pérdida de carga hay que tener presente si el flujo se comporta como laminar o turbulento y si la rheología de la mezcla es newtoniana o no.

Thomas (1976) demostró que ensayos en tuberías de diámetro menores o igual a 100 mm puede predecir con una precisión del 15% la caída de presión en tuberías de hasta 3 veces el diámetro usado como patrón.



TRANSPORTE DE RELAVES EN CANALETAS

Comparativamente, la cantidad de artículos e investigaciones relativa al transporte de relaves en canaletas es mucho menor que los que existen para ductos en presión. En Chile, es frecuente encontrar que, desde un punto de vista económico convenga utilizar sistemas de canales y no tuberías para transportar relaves, debido a las pendientes que se dan de manera natural en nuestra geografía.

Desde un punto de vista conceptual, el problema del flujo en canales abiertos es mucho más complejo que en ductos en presión, debido a que se introduce una incógnita adicional al problema: el área de escurrimiento, la que, además, puede variar a medida que se desarrolla el flujo. En general, el problema se simplifica enormemente al considerar flujo con escurrimiento uniforme, calculándose para la condición normal.

Faddick (1986) propone diseñar utilizando la ecuación de Manning para el cálculo de la altura normal, en régimen supercrítico (recomienda $Fr = 1,25$):

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = AR^{2/3}$$

donde Q es el caudal de la mezcla, n el coeficiente de rugosidad de Manning, i la pendiente del canal, A el área de escurrimiento y R es el radio hidráulico. Para la condición de escurrimiento uniforme, la pendiente del canal es igual a la del plano de carga de la mezcla: $i = J$.

Para asegurar que las partículas no se depositen en el lecho, propone usar la condición:

$$u_{0,1} \geq 35 w_{smax}$$

donde $u_{0,1}$ es la velocidad del flujo a $1/10$ de la altura de escurrimiento y w_{smax} es la velocidad de sedimentación de la partícula más grande. Para estimar $u_{0,1}$ en canales rectangulares considera la distribución logarítmica de velocidades, resultando:

$$u_{0,1} = V + \frac{u_*}{k} (1 + \ln 0,1)$$



para escurrimiento uniforme, la velocidad friccional está dada por $u_* = \sqrt{gR \operatorname{sen} a}$, donde a es el ángulo de inclinación del canal y k es la constante de von Karman, la que tiene el valor de 0,4 para agua limpia y disminuye con la concentración de sólidos, hasta valores tan bajos como 0,2. $V = Q/A$ es la velocidad media de la mezcla. Evaluando el logaritmo:

$$u_{0,1} = V - \frac{1,302}{k} \sqrt{gR \operatorname{sen} a}$$

Hay que tener presente que la ecuación de Manning es válida para flujo turbulento en pared hidrodinámicamente rugosa. En la práctica, la condición turbulenta es fácilmente lograda, pero no necesariamente la condición de pared rugosa, particularmente debido a que la presencia de finos en la mezcla puede aumentar la viscosidad, aumentando así el espesor de la subcapa viscosa (si k_s es el tamaño de la aspereza de la pared, se tiene pared rugosa si $k_s u_* / n > 70$).

De este modo, la condición de Faddick es:

$$35w_s = V - \frac{1,302}{k} \sqrt{gR \operatorname{sen} a}$$

En Chile, a través de memorias o tesis de grado en las Universidades de Chile y Católica, se han desarrollado varias expresiones para determinar la velocidad límite de depósito, algunas de las cuales se detallarán a continuación:

Fórmula de González (1976):

$$V_L = F_{L-Mc} \sqrt{2g(S-1)h_N}$$

donde F_{L-Mc} es el coeficiente que McElvain y Cave obtuvieron para tuberías y h_N es la altura normal de escurrimiento. Los datos experimentales muestran gran dispersión. Según Fuentes (1994), Rayo modificó la ecuación anterior mediante un factor $K \sim 1$, el que debe ser determinado experimentalmente para cada situación particular.

En la década del 1980, Bernardo Domínguez, guió varias tesis y memorias en las que abordó, entre otros temas, la determinación de la velocidad de depósito para relaves de cobre. Las correlaciones obtenidas son:



Errázuriz (1985):

$$V_L = 2,1 \sqrt{2g \left(\frac{r_s}{r_m} - 1 \right) h_N} \left(\frac{d_{85}}{h_N} \right)^{0,142}$$

Domínguez, E. (1986):

$$V_L = 1,83316 \sqrt{8g \left(\frac{r_s}{r_m} - 1 \right) R} \left(\frac{d_{85}}{4R} \right)^{0,15813}$$

Vega (1988) modifica la relación de Domínguez al incluir explícitamente el efecto de la viscosidad de la mezcla:

$$V_L = 1,83316 \sqrt{8g \left(\frac{r_s}{r_m} - 1 \right) R} \left(\frac{d_{85}}{4R} \right)^{0,15813} 1,2^{(3100/Re_m)^3}$$

donde $Re_m = \frac{R\sqrt{gR}}{n_m}$, siendo n_m la viscosidad de la mezcla.

Domínguez, Sourys y Harambour (1989):

$$V_L = 0,6505 \sqrt{8g \left(\frac{r_s}{r_m} - 1 \right) d_{85}} \left(\frac{d_{85}}{4R} \right)^{0,342} \left(\frac{d_{99}}{d_{85}} \right)^{0,386}$$

También Domínguez y sus alumnos propusieron una relación en la que toma en cuenta el efecto el pH del relave, la que no se muestra en este informe.

Hay que tener presente que las correlaciones obtenidas por Domínguez y sus alumnos, corresponden a relaves de cobre, por lo que su extensión a otros materiales particulados debe ser hecha con precaución y sus resultados tomarlos sólo como valores referenciales.