



DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN  
UNIVERSIDAD DE CHILE



# Arquitectura de Computadores CC4301

## Clase 1: Algebra de Boole, Expansión de Shannon, Representaciones de Sistemas Combinacionales

Semestre Primavera 2013

Profesor: Pablo Guerrero

# Sistemas Digitales

- Tiempo Discreto
- Entradas y salidas digitales



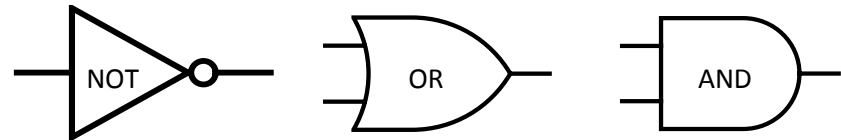
# Sistemas Combinacionales

- No tienen memoria

$$\mathbf{y}^k = f(\mathbf{x}^k)$$

- Ejemplos:

- Compuertas lógicas

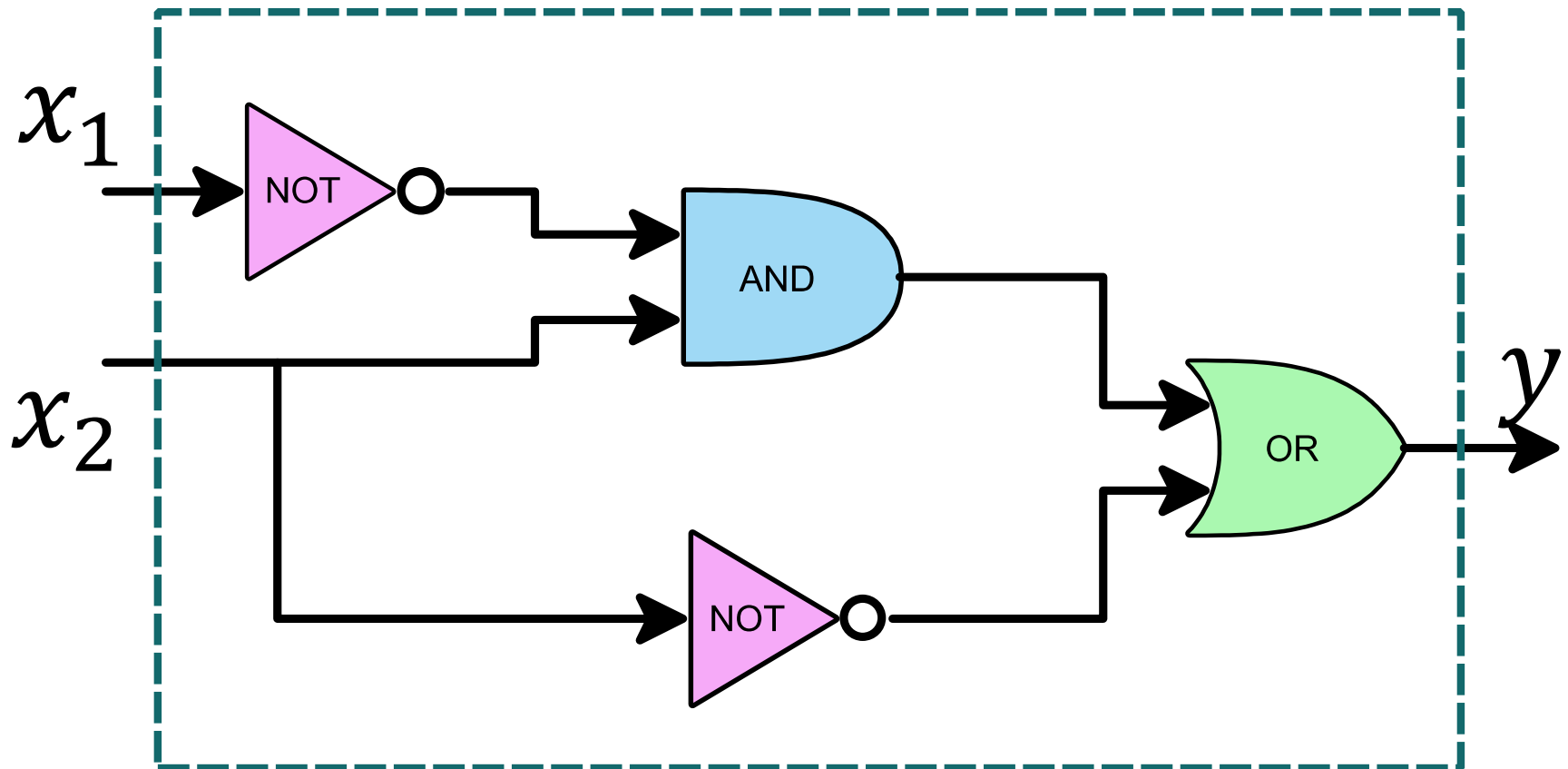


- Combinaciones no retroalimentadas:

- Operaciones Lógicas: Mux, demux, cod, decod.
- Operaciones aritméticas: Sumador, multiplicador.

# Circuitos Combinacionales

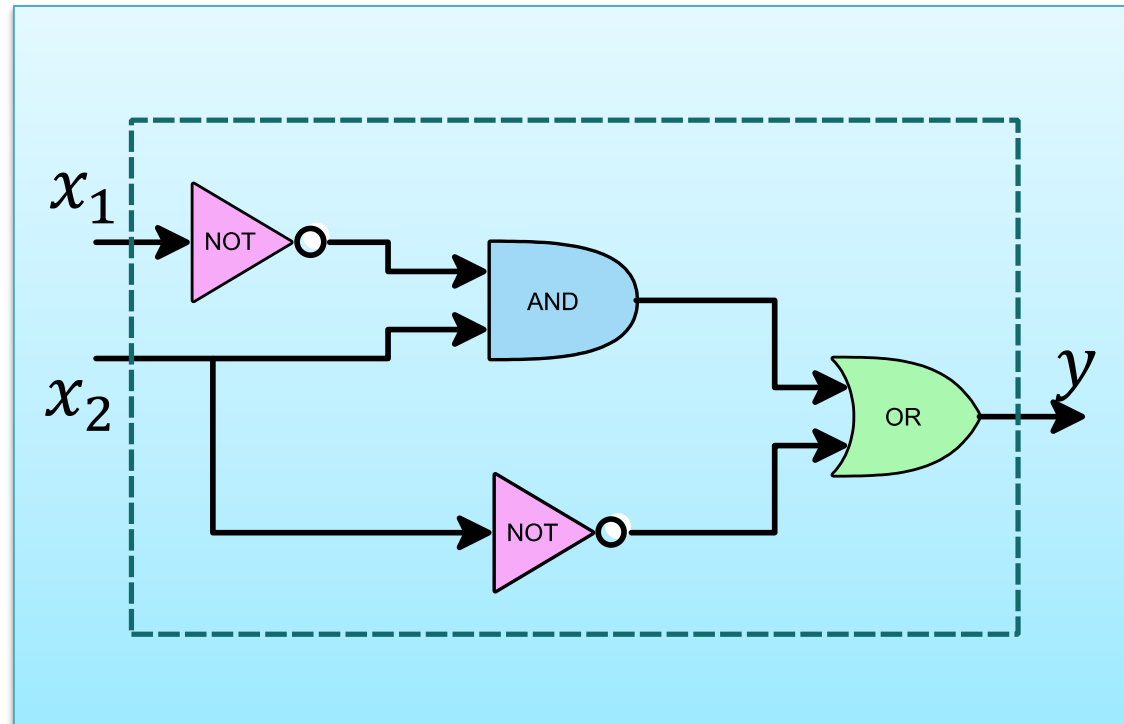
- Ejemplo:



# Representaciones

- Tablas de verdad

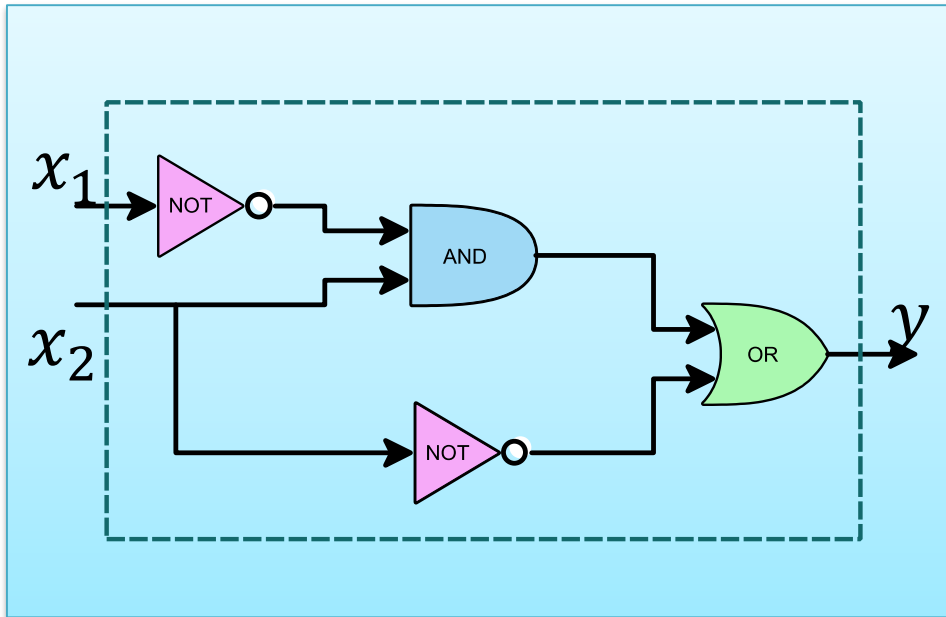
$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



- Fórmulas Algebraicas

$$y = \neg x_1 \wedge x_2 \vee \neg x_2$$

# Tabla de Verdad



Salidas correspondientes a  
cada combinación de entradas

Todas las combinaciones posibles,  
Números binarios, en forma  
creciente

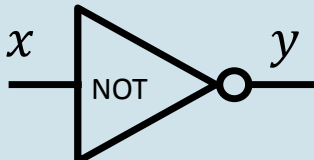
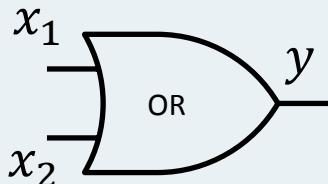
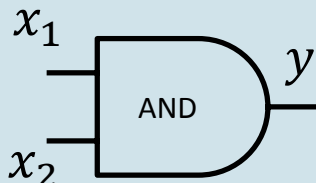
$2^N$

Variables  
de Entrada

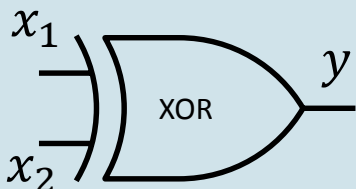
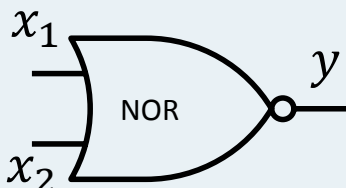
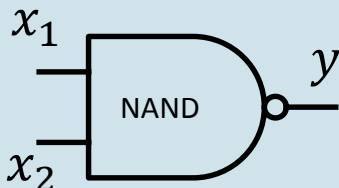
Variables  
de Salida

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

# Compuertas Lógicas

Símbolo	Significado	Tabla de Verdad	Fórmula Algebraica															
	Negación	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	x	y	0	1	1	0	$y = \neg x$									
x	y																	
0	1																	
1	0																	
	O Lógico	<table><tr><th>x<sub>1</sub></th><th>x<sub>2</sub></th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	$y = x_1 \vee x_2$
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
	Y Lógico	<table><tr><th>x<sub>1</sub></th><th>x<sub>2</sub></th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	$y = x_1 \wedge x_2$
x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	y																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																

# Compuertas Lógicas (2)

Símbolo	Significado	Tabla de Verdad	Fórmula Algebraica															
	O Exclusivo	<table><tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>y</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	$x_1$	$x_2$	$y$	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	$y = x_1 \oplus x_2$
$x_1$	$x_2$	$y$																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
	O Negado	<table><tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>y</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	$x_1$	$x_2$	$y$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	$y = \neg(x_1 \vee x_2)$
$x_1$	$x_2$	$y$																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	0																
	Y Negado	<table><tr><th><math>x_1</math></th><th><math>x_2</math></th><th><math>y</math></th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	$x_1$	$x_2$	$y$	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	$y = \neg(x_1 \wedge x_2)$
$x_1$	$x_2$	$y$																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																



# Álgebra de Boole

$\langle A, \wedge, \vee \rangle$  es **Algebra de Boole** ssi:

- **Asociatividad:**  $\forall a, b, c \in A$ :

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = a \vee b \vee c$$

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge b \wedge c$$

- **Conmutatividad:**  $\forall a, b \in A$ :

$$a \vee b = b \vee a$$

$$a \wedge b = b \wedge a$$

# Álgebra de Boole (2)

- **Neutros:**

$$\exists 0 \in A: \forall a \in A, a \vee 0 = a$$

$$\exists 1 \in A: \forall a \in A, a \wedge 1 = a$$

- **Distributividad:**  $\forall a, b, c \in A:$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

- **Negación:**  $\forall a \in A, \exists \neg a \in A:$

$$a \wedge \neg a = 0$$

$$a \vee \neg a = 1$$

# Teoremas Álgebra de Boole

Un Algebra de Boole cumple con:

- **Idempotencia:**  $\forall a \in A$ :

$$a \vee a = a$$

$$a \wedge a = a$$

- **Dominación:**  $\forall a \in A$ :

$$a \vee 1 = 1$$

$$a \wedge 0 = 0$$

# Teoremas Álgebra de Boole (2)

Un Algebra de Boole cumple con:

- **Cancelación:**  $\forall a, b \in A$ :

$$a \vee (a \wedge b) = a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a$$

- **Leyes de Morgan:**  $\forall a, b \in A$ :

$$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$

# Diferentes Notaciones Operadores

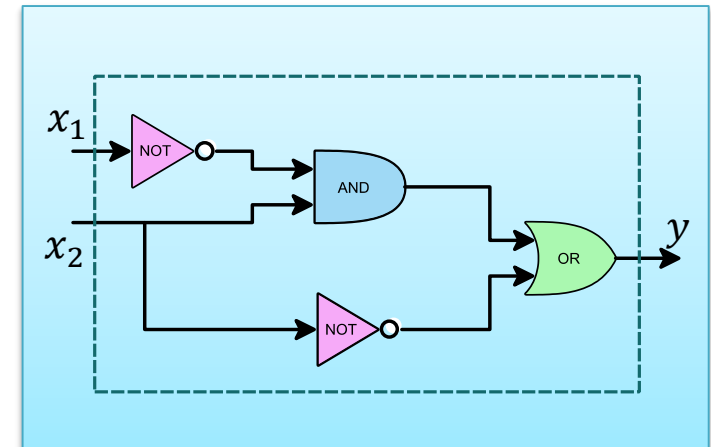
OR	$+$	$\cup$	$\vee$	$ $	$  $
AND	$\cdot$	$\cap$	$\wedge$	$\&$	$\&\&$
NOT	$\bar{a}$	$'$	$\neg$	$\sim$	$!$

# Diseño de Circuitos Combinacionales

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0



$$y = \neg x_1 \wedge x_2 \vee \neg x_2$$



# 1.- Obtención Ecuación

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$\Rightarrow \neg x_1 \wedge x_2$$

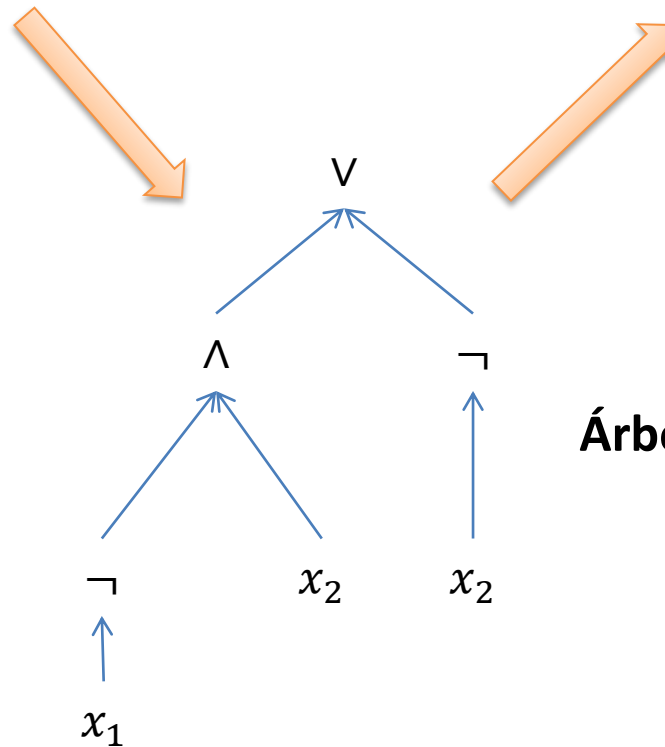
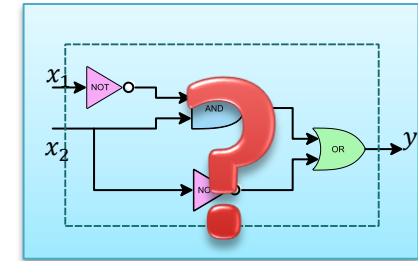
$$\Rightarrow x_1 \wedge \neg x_2$$

$$\Rightarrow \vee$$

$$\Rightarrow (\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2)$$

## 2.- Diseño a Partir de Ecuación

$$y = \neg x_1 \wedge x_2 \vee \neg x_2$$



Árbol de operaciones



# Simplificación Sumas de Productos

Reglas para simplificar ecuaciones.

Sea  $v = f(\{x_i\})$ ,  $w = g(\{x_i\})$ :

$$vw \vee \neg vw = w$$

Ej:  $x_1 x_2 \neg x_3 \vee x_1 \neg x_2 \neg x_3 = ?$

$$x_1 \neg x_3$$

# Simplificación Sumas de Productos (2)

Reglas para simplificar ecuaciones (2).

Sea  $w = f(\{x_i\})$ :

$$x_j \neg x_k \quad w \vee$$

$$\neg x_j x_k \quad w \vee$$

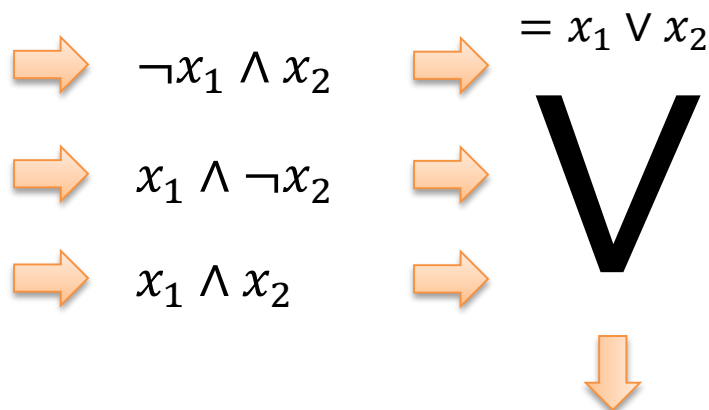
$$x_j x_k \quad w$$

=?

$$(x_j \vee x_k)w$$

# Ejemplo Simplificación

$x_1$	$x_2$	$y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



$$(\neg x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$$


$$vw \vee \neg vw = w$$

$$x_j \neg x_k w \vee \neg x_j x_k w \vee x_j x_k w = (x_j \vee x_k) w$$

# Expansión de Shannon


$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) =$$

$$\boxed{x_i} f(x_1, \dots, \boxed{1}, \dots, x_n) \vee \boxed{\neg x_i} f(x_1, \dots, \boxed{0}, \dots, x_n)$$



**1** **0**

$f(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$



**0** **1**

$f(x_1, \dots, 0, \dots, x_n)$

$x_i?$

$\neg x_i?$

# Trabajo Grupal 2

Recordar:

- $v\mathbf{w} \vee \neg v\mathbf{w} = \mathbf{w}$

- $$\begin{aligned} & x_j \neg x_k \mathbf{w} \vee \\ & \neg x_j x_k \mathbf{w} \vee \\ & x_j x_k \mathbf{w} \\ & = (x_j \vee x_k) \mathbf{w} \end{aligned}$$

