

Pregunta 3 Control 2 Matemáticas Discretas.

Bernardo Subercaseaux

17 de noviembre de 2015

1 Solución

En primer lugar, para entender bien el problema consideremos el siguiente ejemplo:

$$V = \{p, q, r, s\} \rightarrow v = |V| = 4$$

$E(0)$, la cantidad de 'expresiones proposicionales bien formadas' con 0 conectores, es exactamente 4. En efecto p, q, r y s son 'expresiones proposicionales bien formadas' con 0 conectores.

$E(1)$, la cantidad de 'expresiones proposicionales bien formadas' con 1 conector, se hace difícil de calcular para un ejemplo, incluso para uno del tamaño propuesto. Pero lo importante es entender que se contarán expresiones como $' \sim (p)'$, $'(r) \wedge (s)'$, $'(s) \wedge (r)'$, etc. (Note que no tenemos ninguna información que indique que los conectores son o no conmutativos, por lo que efectivamente $'(r) \wedge (s)'$ y $'(s) \wedge (r)'$ son expresiones diferentes).

Dicho eso, una de las primeras cosas interesantes a notar es que si se tiene una expresión de A conectores, y se le niega, entonces queda con $A + 1$ conectores.

Si se tiene también una expresión de B conectores, $(A) \wedge (B)$ tiene $A + B + 1$ conectores (los A de la primera, los B de la segunda, y 1 del conector que las une).

Es claro entonces, que para formar una expresión de N conectores se deberán usar conectores sobre expresiones de menos de N conectores.

Llamemos $E_{\sim}(N)$ a las expresiones de N conectores formadas a partir de un conector $\sim$ sobre una expresión de menos conectores. Por lo dicho en los párrafos anteriores:

$$E_{\sim}(N) = E(N - 1) \tag{1}$$

(Dicho de otra forma, cualquier expresión de $N-1$ conectores a la que se le agrega un conector unario tiene N conectores.)

Por otra parte, sean $E_{\wedge}(N)$ las expresiones formadas por usar el conector $\wedge$ a partir de dos expresiones de menos conectores, y $E_{\vee}(N)$ las que se forman usando el conector $\vee$.

Como se mencionó en un párrafo anterior, para contar $E_{\wedge}(N)$ debemos considerar las parejas de expresiones tales que la suma de la cantidad de conectores es $N - 1$ (el conector que las unirá generará un total de N conectores, lo que nos interesa contar). Por ejemplo, si $N = 7$, para formar una expresión de 7 conectores pueden unirse una de 2 y una de 4, o dos de a 3, o cualquier combinación tal que la suma de las cantidades sea 6.

Una ilustración:

$$A = \sim((p) \wedge (q))$$

$$B = (((q) \vee (r)) \wedge (r)) \vee (\sim(r))$$

Dado que A tiene 2 conectores, y B tiene 4, $A \wedge B$ tendrá 7, y $A \vee B$ también. Es decir, son expresiones que queremos contar.

Entonces, para contar $E_{\wedge}(N)$ debemos contar cada posible pareja de expresiones que sumen $N-1$ conectores. Para cada expresión que tiene i conectores, la podemos unir a una que tenga $N-i-1$ conectores (así suman $N-1$), luego, por principio del producto, hay que multiplicar la cantidad que tiene i conectores ($E(i)$) con las que tengan $N-i-1$ ($E(N-i-1)$). Pero i va desde 0 hasta $N - 1$ (puesto que las proposiciones de 0 son las variables en V , y se debe llegar a las de $N - 1$ conectores dado que se les unirá con otras, y el conector con que se les une hace que se lleve ya N conectores, y no queremos contar expresiones de más de N conectores).

Del análisis anterior:

$$E_{\wedge}(N) = \sum_{i=0}^{N-1} E(i) * E(N - i - 1) \quad (2)$$

Dado que $\wedge$ y $\vee$ tienen las mismas propiedades, es claro que $E_{\wedge}(N) = E_{\vee}(N)$.

Sumando $E_{\sim}(N)$ con $E_{\wedge}(N)$ y $E_{\vee}(N)$ se llega a la respuesta de la pauta.

Luego evaluar a mano los casos debería ser pura concentración :P