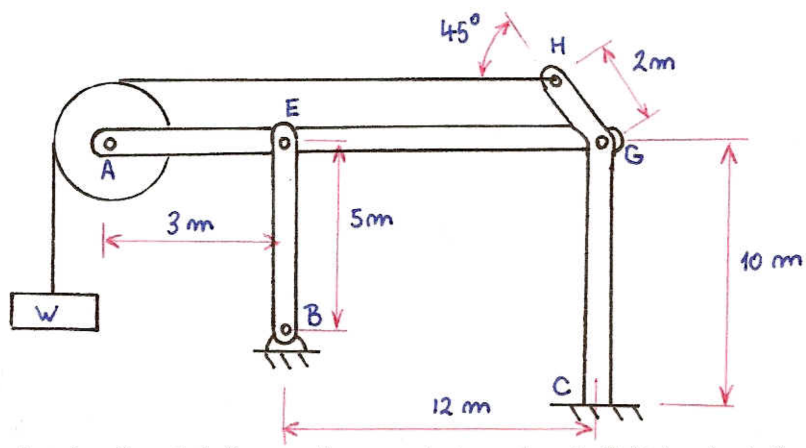
Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Examen. Resistencia de Materiales ME 46A-2.

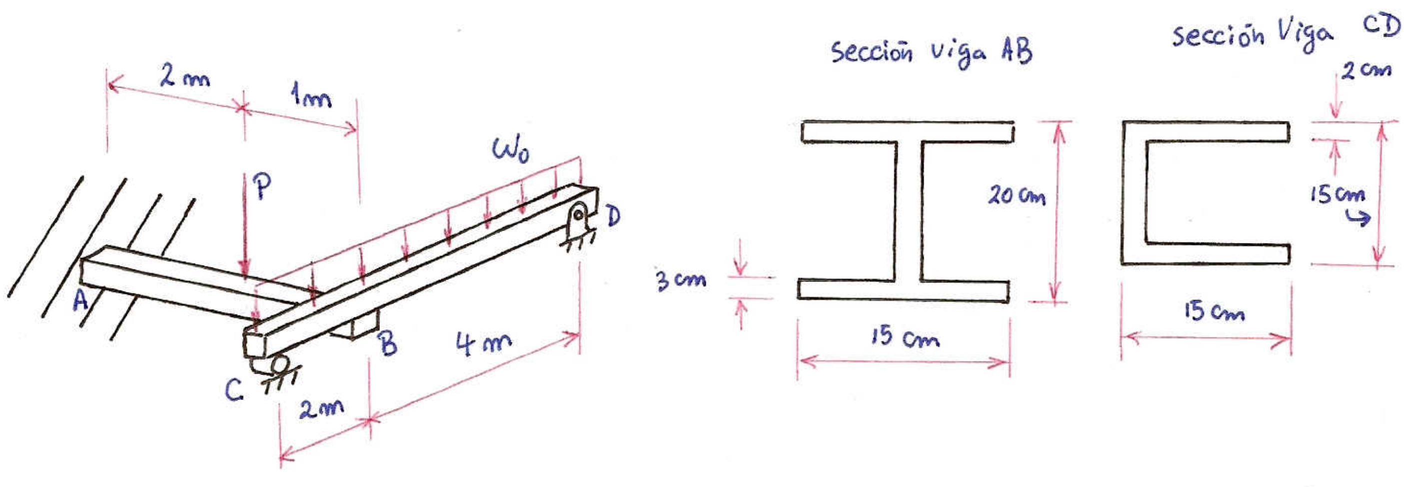
02/12/2008

Profesor: Roger Bustamante

1) Para la figura, calcule las reacciones en los puntos ***B*** y ***C***. No hay roce entre el cable y la polea. La polea tiene un peso despreciable. $W = 300\ N$ (15 puntos)

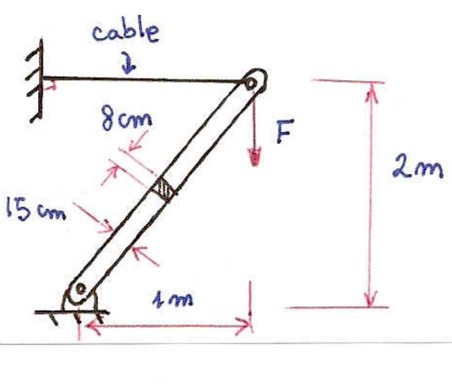


2) Las dos vigas de la figura están en contacto en el punto ***B***. Determine la fuerza de contacto en dicho punto. Las secciones de las vigas se muestran en las figuras del lado derecho. **Use el método de la ecuación de la elástica**. (20 puntos)



$\boldsymbol{P} = 1000\ N$ $\quad w_0 = 500\ N/m \quad$ $\boldsymbol{E} = 150\ GPa$

3) Una barra de sección rectangular como se muestra la figura, esta conectada a un cable inextensible y a una fuerza F en su extremo. Determine la máxima fuerza ***F*** para que no se produzca pandeo. $\boldsymbol{E} = 40\ GPa$ (15 puntos)



4) Responda a las siguientes preguntas:
   a) Describa brevemente el fenómeno de fatiga y explique como se obtiene la resistencia a la fatiga S_n para un material. (5 puntos)
   b) ¿Cual es el fundamento del criterio de falla de Von Mises? (3 puntos)
   c) Además de la deformación plástica. ¿Cuales otros fenómenos (nombre tres) pueden considerarse como 'falla' de un material? (2 puntos)

Formulario

Torsión $T = \frac{\theta GJ}{L}$ Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ $\tau = \frac{Tr}{J}$

Flexión

Esfuerzo $\sigma_x = -\frac{M(x)}{I_z} y$

Momento inercia de área y eje neutro

Caso general eje neutro $\int_A y dA = 0$ momento inercia $I_z = \int_A y^2 dA$

Sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$

Sección circular $I_z = \frac{\pi}{4} r^4$

Eje paralelo al neutro $\hat{I}_z = I_z + distancia^2 Area$

Corte viga sección arbitraria

$$\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi dA$$

Ecuación de la elástica

$\hat{y}$: Deflexión vertical de la viga

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{w(x)}{EI} \quad \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI} \quad \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{d\hat{y}}{dx} \approx \theta(x)$$

$$\int \delta(x-a)dx = r(x-a) \quad \int r(x-a)dx = (x-a)r(x-a) \quad \int (x-a)r(x-a)dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)$$

$$\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a)$$

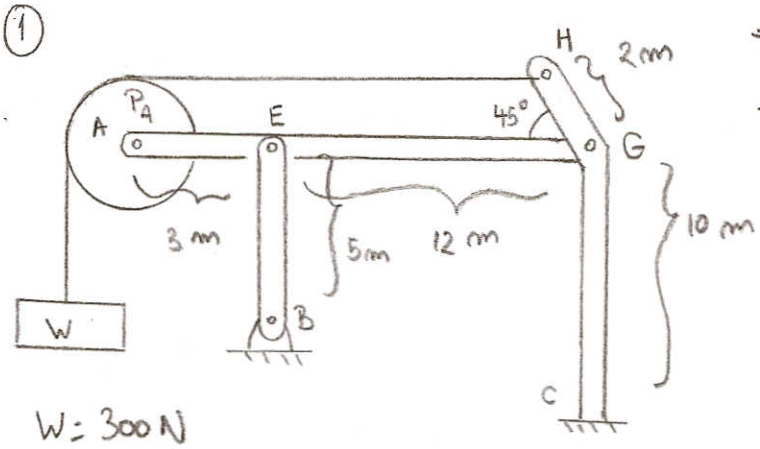
Esfuerzo de Von Mises

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

Ecuación para el pandeo

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{P}{EI}\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w(x)}{EI}$$

1

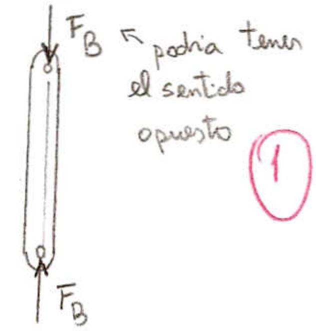


→ Reacciones en B y C

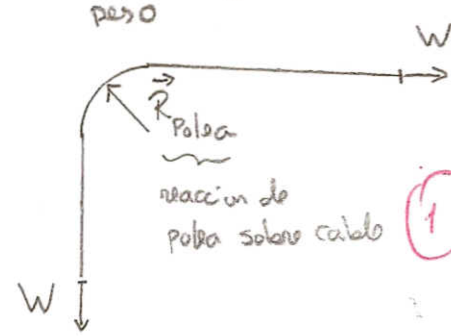
→ no hay roce entre cable y la polea

$W = 300\,N$

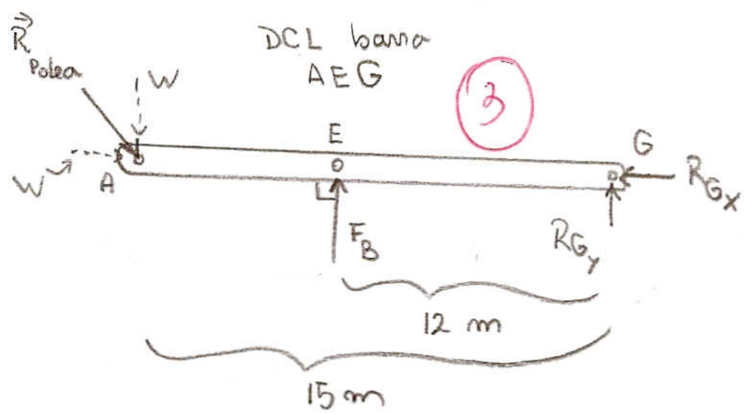
DCL barra EB



DCL cable y peso



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_{polea_y} = W \\ R_{polea_x} = -W \end{array} \right\}$$



$\vec{R}_G$ ← reacción de barra HGC sobre barra AEG

$$\sum_G M_z = 0 \Rightarrow W \times 15 - F_B \times 12 = 0$$

2

$$\Rightarrow F_B = \frac{15}{12} W = \frac{15}{12} \times 300$$

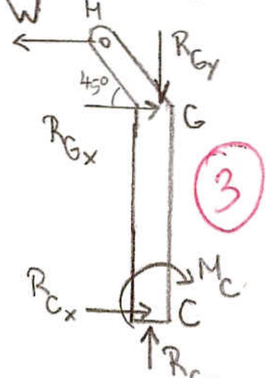
$$\Rightarrow F_B = 375\ N$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow W - R_{G_x} = 0 \Rightarrow R_{G_x} = W = 300\ N$$ 1

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -W + F_B + R_{G_y} = 0 \Rightarrow R_{G_y} = W - F_B = 300 - 375$$

$$\Rightarrow R_{G_y} = -75$$ 1

DCL barra CGH



$\vec{R}_C$ reacción de piso sobre barra CGH en C

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{C_y} = R_{G_y} = -75N$$ 1

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -W + R_{G_x} + R_{C_x} = 0 \Rightarrow R_{C_x} = W - R_{G_x} = 300 - 300 = 0$$ 1

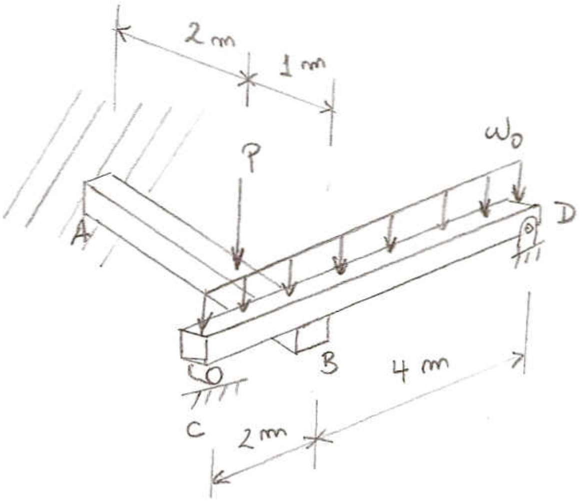
$$\sum_C M_z = 0 \Rightarrow -M_C - R_{G_x} 10 + W(10 + 2 \cdot \text{sen} 45°) = 0$$

$$\Rightarrow M_C = 300\left(10 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 300 \times 10 = 300 \times \sqrt{2} = 424{,}26\ Nm$$ 1

2

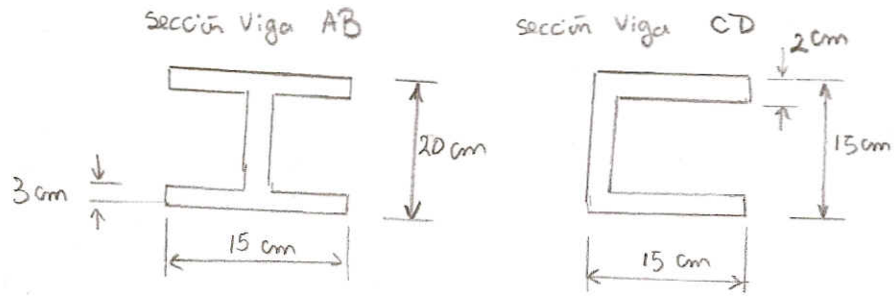
$E = 150\ GPa$

a



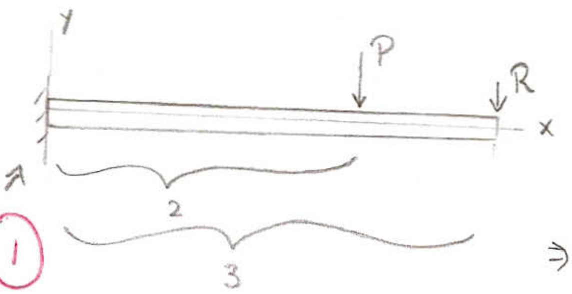
$P = 1000\ N$

$w_0 = 500\ N/m$



→ Asumiremos que en B las dos vigas hacen contacto, y por lo tanto se genera una fuerza de contacto R

→ Viga AB



Ec. elástica

empotrado

$\hat{y}(0)=0$

$\frac{d\hat{y}}{dx}(0)=0$ 1

1 $$\frac{d^4\hat{y}}{dx^4} = -\frac{1}{EI}\{P\delta(x-2)+R\delta(x-3)\}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} = -\frac{1}{EI}\{P\eta(x-2)+R\eta(x-3)\}+C_3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\{P(x-2)\eta(x-2)+R(x-3)\eta(x-3)\}+C_3x+C_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{1}{2EI}\{P(x-2)^2\eta(x-2)+R(x-3)^2\eta(x-3)\}+\frac{C_3}{2}x^2+C_2x+C_1$$

$$\Rightarrow \hat{y} = -\frac{1}{6EI}\{P(x-2)^3\eta(x-2)+R(x-3)^3\eta(x-3)\}+\frac{C_3}{6}x^3+C_2\frac{x^2}{2}+C_1x+C_0$$

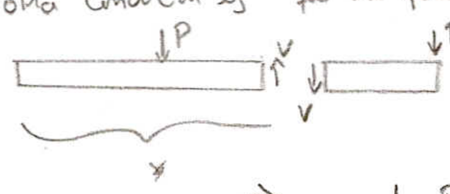
$\frac{d\hat{y}}{dx}(0)=0 \Rightarrow C_1=0$ $\qquad$ $\hat{y}(0)=0 \Rightarrow C_0=0$

→ Condiciones para $x=3$ respecto a $\hat{y}$ → no hay restricción al "giro" (idealmente)

$$\Rightarrow \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(3)=0 \quad 2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{EI}P + 3C_3 + C_2 = 0$$

→ La otra condición es que la fuerza interna de corte sea igual a (más/menos) R para $x\to 3$



para $x\to 3$ $\quad V(x) = -R$

$$\Rightarrow EI\frac{d^3\hat{y}}{dx^3}(3) = R \quad 2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{EI}P + C_3 = \frac{R}{EI} \Rightarrow C_3 = (R+P)\frac{1}{EI}$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{P}{EI} - 3C_3 = \frac{P}{EI} - \frac{3R}{EI} - \frac{3P}{EI} = \frac{-1}{EI}(3R+2P)$$ 1

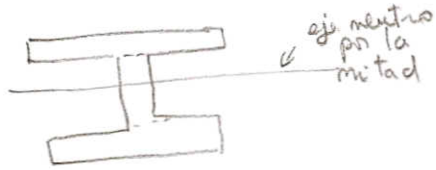
luego $\Rightarrow$ desplazamiento en $x=3$ para viga AB es $\hat{y}(3)$

$$\hat{y}(3) = \frac{-1}{6EI}P + \frac{C_3}{6}\cdot 3^3 + \frac{C_2}{2}\cdot 3^2$$

$$= -\frac{1}{6EI}P + \frac{4{,}5}{EI}(R+P) - \frac{4{,}5}{EI}(3R+2P)$$ 1

1 $$= \frac{1}{EI}\{-4{,}667\,P - 9R\}$$ ← negativo (si R es positivo)

I_z viga AB

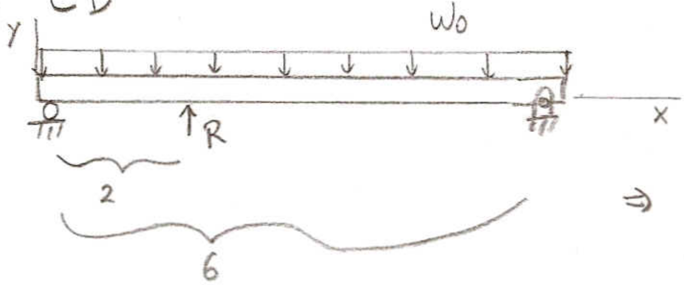


$$I_z = \frac{0{,}03\times(0{,}2-0{,}06)^3}{12} + 2\times\left[\frac{0{,}15\times 0{,}03^3}{12} + (0{,}1-0{,}015)^2\times 0{,}15\times 0{,}03\right]$$

$$= 0{,}00007256\ m^4$$

$$\Rightarrow \hat{y}(3) = \frac{1}{0{,}00007256\,E}\{-4667 - 9R\}$$ 2

→ Viga CD



Ec. elástica

$$\frac{d^4\hat{y}}{dx^4} = -\frac{1}{EI}\{-R\,\delta(x-2) + w_0\}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} = -\frac{1}{EI}\{-R\,\eta(x-2) + w_0 x\} + C_3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\left\{-R(x-2)\eta(x-2) + w_0\frac{x^2}{2}\right\} + C_3 x + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = \frac{-1}{2EI}\left\{-R(x-2)^2\eta(x-2) + w_0\frac{x^3}{3}\right\} + C_3\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_1$$

1 $$\Rightarrow \hat{y} = \frac{-1}{6EI}\left\{-R(x-2)^3\eta(x-2) + w_0\frac{x^4}{4}\right\} + C_3\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_0$$

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \qquad \hat{y}(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0$$

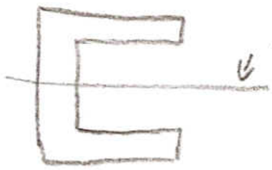
1 $$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(6) = 0 \Rightarrow \frac{4R}{EI} - \frac{w_0}{EI}\frac{6^2}{2} + C_3\,6 = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{EI}\left\{3w_0 - \frac{2}{3}R\right\}$$

$$\hat{y}(6)=0 \Rightarrow -\frac{1}{6EI}\left\{-R\,4^3 + w_0\,\frac{6^4}{4}\right\} + C_3\,\frac{6^{\cancel{3}2}}{\cancel{6}} + C_1\,6 = 0$$ (c)

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{6}{EI}\left\{3w_0 - \frac{2}{3}R\right\} + \frac{1}{36EI}\left\{-64R + 324\,w_0\right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{-9w_0 + 2{,}222\,R\right\}$$ 1

I_z viga CD



eje neutro por la mitad

$$I_z = \frac{0{,}02}{12} \times 0{,}15^3 + 2\times\left[\frac{0{,}13}{12}\times 0{,}02^3 + (0{,}075-0{,}01)^2 \times 0{,}13\times 0{,}02\right]$$

1 $$= 2{,}7768\times 10^{-5}\ m^4$$

Desplazamiento en $x=2$

$$\hat{y} = -\frac{1}{6EI}\,w_0\cdot\frac{2^4}{4} + C_3\times\frac{2^3}{6} + C_1\times 2$$

$$= -\frac{1}{6EI}\,4\,w_0 + \frac{4}{3}\,\frac{1}{EI}\left\{3w_0 - \frac{2}{3}R\right\} + \frac{2}{EI}\left\{-9w_0 + 2{,}222\,R\right\}$$

2 $$= -\frac{2}{3E\times 2{,}7768\times 10^{-5}}\,w_0 + \frac{4}{3E\times 2{,}7768\times 10^{-5}}\left\{3w_0 - \frac{2}{3}R\right\}$$
$$+ \frac{2}{E\times 2{,}7768\times 10^{-5}}\left\{-9w_0 + 2{,}222\,R\right\}$$

el desplazamiento es igual para ambas barras en punto B

2 $$\Rightarrow \frac{1}{0{,}00007256\,\cancel{E}}\left\{-4667 - 9R\right\} = \frac{1}{2{,}7768\times 10^{-5}\,\cancel{E}}\left\{-\frac{2}{3}\times 500 + \frac{4}{3}\left(3\times 500 - \frac{2}{3}R\right) + 2\left(-4500 + 2{,}222\,R\right)\right\}$$

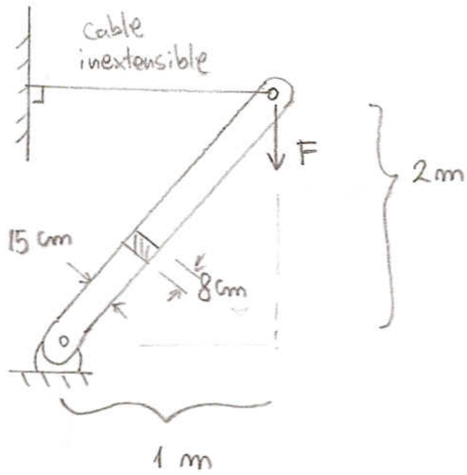
$$\Leftrightarrow -1786{,}08 - 3{,}444\,R = -333{,}333 + 2000 - 0{,}8889\,R - 9000 + 4{,}444\,R$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 792{,}578\ N}$$

1

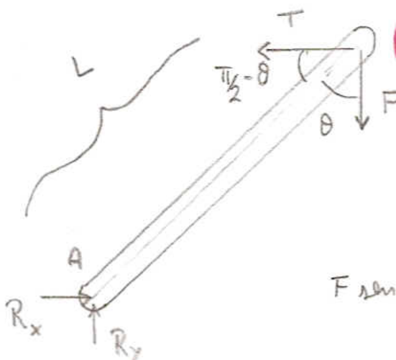
(3) $E = 40\ GPa$ $\theta = 26,565°$ (a)

$L = 2,236\ m$



Fuerza máxima F para que no se produzca pandeo

DCL



2

$\underbrace{\Sigma F_x = 0}$ $\Sigma F_y = 0$

$R_x = T$ $R_y = F$

$\underbrace{\sum_A M_z = 0}$

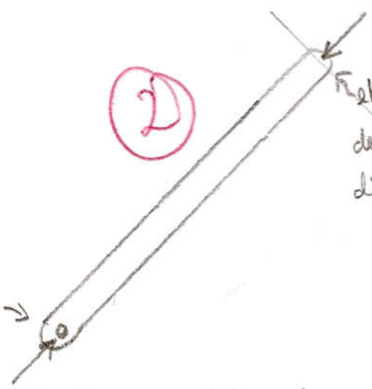
$\Updownarrow$

$F \operatorname{sen}\theta\ L - T \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}_{\cos\theta} = 0$

$\Rightarrow T = F \tan\theta = \frac{1}{2} F$

1

$F\cos\theta + T\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$



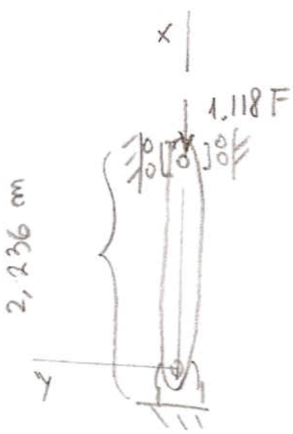
2

el cable impide desplazamiento en dirección tangencial pero permite giro

gira libremente

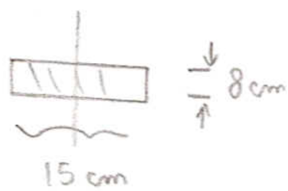
$F\cos\theta + T\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}_{\operatorname{sen}\theta} = F\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right) = 1,118\ F$ 1

$\Updownarrow$



1

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \text{ en nuestro caso } \quad \frac{d^4y}{dx^4} + \frac{1,118F}{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (*)$$



$I = \frac{0,08}{12} \times 0,15^3 = 0,0000225\ m^4$ 1

solución de (*)

$$y(x) = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1,118F}{EI}}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{1,118F}{EI}}\,x\right) + C_3 x + C_4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C_1 \frac{1,118F}{EI} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1,118F}{EI}}\,x\right) - C_2 \frac{1,118F}{EI}\cos\left(\sqrt{\frac{1,118F}{EI}}\,x\right)$$

$y(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ 1

$\frac{d^2y}{dx^2}(L) = 0 \Rightarrow C_1 \frac{1,118F}{EI} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1,118F}{EI}}\,L\right) = 0$

$\Rightarrow y(L) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_3 = 0$ 1 por lo tanto se resuelve $C_1 \frac{1,118F}{EI} \operatorname{sen}\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{1,118F}{EI}}\,L}_{=\,m\pi}\Big) = 0$ 1

se elige $m=1$ $\Rightarrow$ F crítico $\sqrt{\frac{1,118F}{EI}}\,L = \pi \Rightarrow F = \frac{EI}{1,118}\frac{\pi^2}{L^2}$ 2

$\Rightarrow F = 1589,12$ kN 2