Examen, Resistencia de Materiales ME3202
1er semestre 2012

Profesor: R. Bustamante

1. El mecanismo de la Figura 1 levanta una carga W al extenderse el actuador hidráulico DE. Las barras AD y BC tienen una longitud L. ¿Qué fuerza debe ejercer el actuador DE para mantener la carga en equilibrio? (25 puntos)

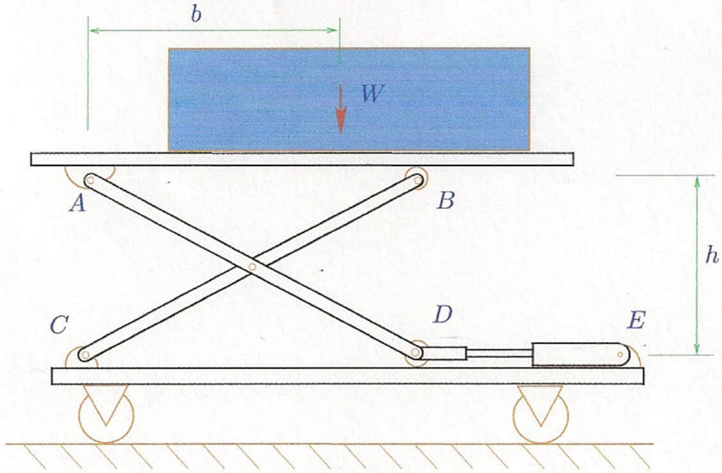


Figura 1: Mecanismo y carga.

Datos: $L = 120$cm, $h = 50$cm, $W = 2000$N, $b = 70$cm.

2. Una carga P comprime un poste de aluminio AB de sección circular hueca y de longitud L como se muestra en la Figura 2. Los diámetros exteriores correspondientes a las partes superior e inferior del poste son d_A y d_B y el espesor de la pared es t como se muestra en las vistas del lado derecho. Demuestre que el acortamiento del poste δ está dado por

$$\delta = \frac{PL}{\pi E t (d_B - d_A)} \ln\left(\frac{d_B - t}{d_A - t}\right),$$

donde E es el módulo de elasticidad del material. (20 puntos)

3. La Figura 3 representa dos vigas de acero de sección transversal rectangular constante que se muestra en la vista inferior de manera ampliada. En A tenemos un empotramiento, en C y D articulaciones tipo rodillo y en B un pasador conecta a la viga AB con la viga BD. El punto B descansa en un muelle de rigidez k. La viga AB recibe una carga vertical uniforme w_0.

   Determine cuanto descience el punto B. Obtenga el estado de esfuerzos para el punto M mostrado en la vista inferior, considerando un corte imaginario en A. (30 puntos)

   Datos: L =2m; L_1 = 70cm; L_2 =180cm; h = 13cm; a =3.5cm; b = 2cm; w_0 = 3000N/m; k = 500N/mm; E = 190GPa; G =75GPa

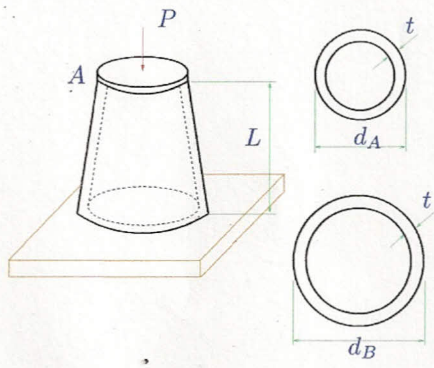


Figura 2: Poste de aluminio.

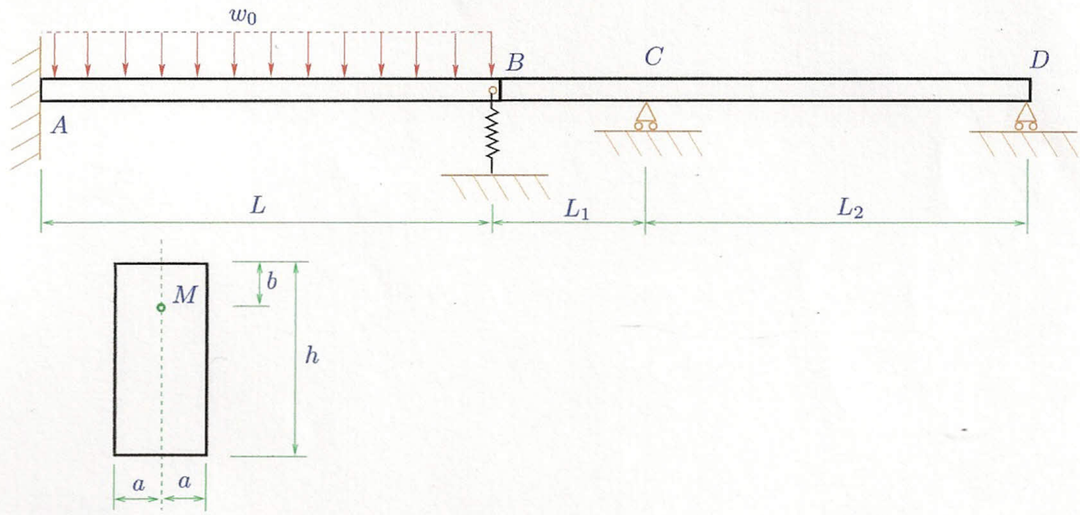


Figura 3: Dos vigas y resorte.

4. *a*) En un paralelepípedo definido por los planos $x_1 = \pm a$, $x_2 = \pm b$, $x_3 = \pm c$ el estado de esfuerzos está dado por

$$\underset{\sim}{T} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{3}(x_2^3 - x_1^3) & \beta x_1^2 x_2 & 0 \\ \beta x_1^2 x_2 & -\beta x_1(x_1^2 + x_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

en donde α, β son constantes. Verifique que las ecuaciones de equilibrio (la primera ley del movimiento de Cauchy sin fuerzas de cuerpo en el caso cuasi-estático) son satisfechas para este estado de esfuerzos. (6 puntos)

b) Para un material elástico isotrópico se tiene que $\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$. Considerando que $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, reemplazando en la ecuación de equilibrio obtenga en notación indicial el sistema de ecuaciones en derivadas parciales del problema de valor de frontera (caso cuasi-estático) en elasticidad lineal en términos de las componentes del campo de desplazamientos. Este sistema de ecuaciones es conocido como las ecuaciones de Navier. Comente en detalle además en relación a las condiciones de borde. (9 puntos)

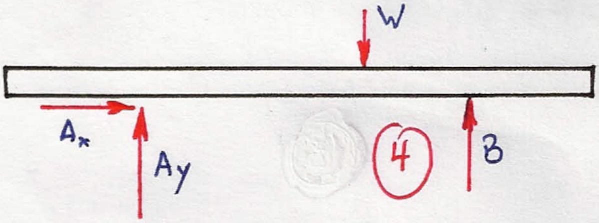
Formulario

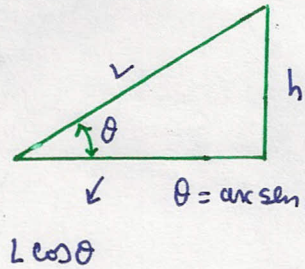
- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{Tr}{J}$
- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' \,\mathrm{d}A$. Eje sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$, a base, b altura. Eje sección circular $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$, d diámetro. Triángulo rectángulo $\bar{y} = \frac{b}{3}$, $I_z = \frac{ab^3}{36}$, a base, b altura. Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A$.
- Deflexión
$$\frac{d^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} = -\frac{w(x)}{EI_z}, \quad \frac{d^3\hat{y}}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{V(x)}{EI_z}, \quad \frac{d^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI_z}, \quad \frac{d\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta(x),$$
$$\int \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = r(x-a), \quad \int r(x-a)\,\mathrm{d}x = (x-a)r(x-a),$$
$$\int (x-a)r(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a), \quad \int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a),$$
- Corte en vigas: Sección rectangular$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$, Sección arbitraria $\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t}\int_y^c \xi \mathrm{d}A$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA}\mathrm{d}x$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI}\mathrm{d}x$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,\mathrm{d}x$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V(x)^2}{GA}\,\mathrm{d}x$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$.
- Pandeo: Ecuación caso general $\frac{\mathrm{d}^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} + \frac{P}{EI}\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{w(x)}{EI}$. Solución caso especial $w(x) = 0$, $\hat{y}(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + c_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + c_3 x + c_4$.

  Ecuación caso columna excéntrica: $\frac{\mathrm{d}^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI}\hat{y} = -\frac{Pe}{EI}$, e excentricidad, L largo total columna. Solución $\hat{y}(x) = C_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}x\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}x\right) - e$. Caso $\hat{y}(0) = 0$ y $\hat{y}(L) = 0$, $C_1 = \frac{e\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}L\right)\right]}{\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}L\right)}$, $C_2 = e$.

1) (1)

DCL plataforma AB





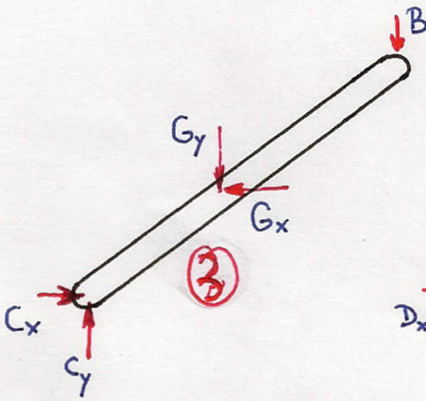
$\theta = \text{arc sen}\left(\frac{h}{L}\right)$

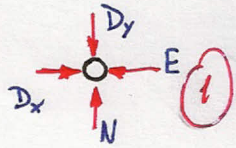
$\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$

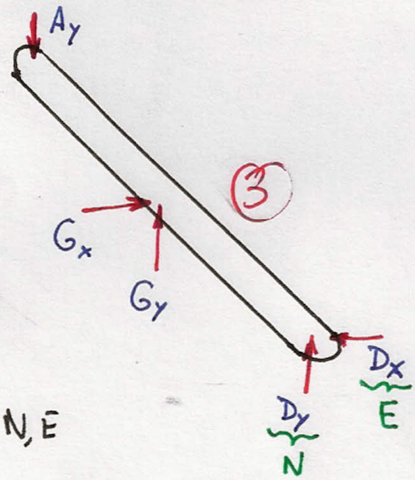
$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow B L\cos\theta = Wb$ 1

$\Rightarrow B = \dfrac{Wb}{L\cos\theta}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = W - B = W\left(1 - \dfrac{b}{L\cos\theta}\right)$ 1







6 incognitas C_x, C_y, G_x, G_y, N, E

Barra $\overline{BC}$ $\quad \sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = G_x$

Barra $\overline{AD}$ $\quad \sum F_x = 0 \Rightarrow G_x = E$

4 incognitas $C_y \quad G_y \quad N \quad E$

4 ecuaciones

⇓

Barra $\overline{BC}$ $\quad \sum F_y = 0 \Rightarrow C_y - G_y = B$ (i) 1

$\sum_C M_y = 0 \Rightarrow E\dfrac{h}{2} - G_y \dfrac{L}{2}\cos\theta = B L\cos\theta$ (ii) 2

Barra $\overline{AD}$ $\quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N + G_y = A_y$ (iii) 1

$\sum_D M_z = 0 \Rightarrow A_y L\cos\theta - E\dfrac{h}{2} - G_y\dfrac{L}{2}\cos\theta = 0$ (iv) 2 restanto (ii) - (iv)

$$\Rightarrow Eh - A_y L\cos\theta = BL\cos\theta$$

$$\Rightarrow E = \frac{L\cos\theta\,(B - A_y)}{h} \quad 3$$

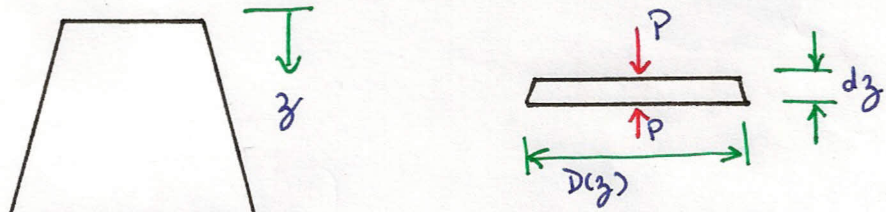
$\theta = 0.4298$ rad

$B = 1283.4$ N 1

$A_y = 716.608$ N 1

$\Rightarrow E = 1236.6$ N 1

3| 2



3

2 $d\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz}$ $\qquad d\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{A(z)\,E}$ 2

$$\Rightarrow \frac{P}{E}\frac{1}{A(z)}\,dz = \Delta(dz) \Rightarrow \delta = \int_0^L \Delta(dz) = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{1}{A(z)}\,dz$$ 3

2 $D_o(z) = d_A + (d_B - d_A)\frac{z}{L}$ $\qquad D_i = D_o - 2t$

$$A(z) = \frac{\pi}{4}(D_o^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{4}\left[D_o^2 - (D_o - 2t)^2\right]$$

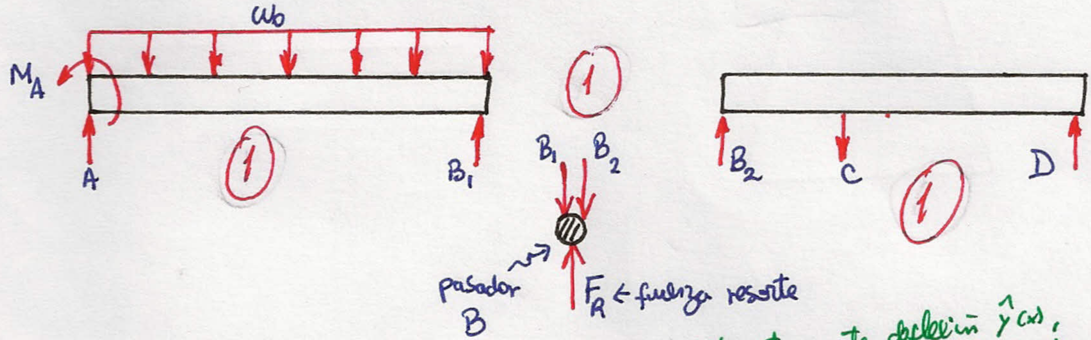
$$= \frac{\pi}{4}\left[\cancel{D_o^2} - \cancel{D_o^2} + 4tD_o - 4t^2\right] = \pi(tD_o - t^2) = \pi t(D_o - t)$$ 1

$$\Rightarrow \delta = \frac{P}{E}\int_0^L \frac{1}{\pi t\left[d_A + (d_B - d_A)\frac{z}{L} - t\right]}\,dz$$ 2

$$= \frac{P}{E}\,\frac{L}{(d_B - d_A)}\,\frac{1}{\pi t}\,\underbrace{\ln\left[d_A + (d_B - d_A)\frac{z}{L} - t\right]\Big|_0^L}_{\ln(d_B - t) - \ln(d_A - t)}$$ 2

$$= \frac{P}{E}\,\frac{L}{\pi t(d_B - d_A)}\,\ln\left(\frac{d_B - t}{d_A - t}\right)$$ 3

③ DCL barras AB y BD



• Se puede usar Castigliano (se puede usar alternativamente deflexión $\hat{y}(x)$, pero es un método más complicado para este problema)

Equilibrio $\overline{AB}$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A = w_0 L - B_1 \quad (1)$$

$$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow M_A = w_0 \frac{L^2}{2} - B_1 L \quad (1)$$

Equilibrio pasador

$$B_1 + B_2 = F_R \quad (*) \quad (2)$$

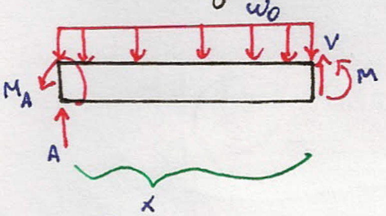
Equilibrio BD

$$\sum_D M_z = 0 \Rightarrow C L_2 = B_2 (L_1 + L_2)$$

$$\Rightarrow C = B_2 \frac{(L_1 + L_2)}{L_2} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow D = C - B_2 = B_2 \left(\frac{L_1 + L_2}{L_2} - 1 \right) = B_2 \frac{L_1}{L_2} \quad (1)$$

• Cálculo cargas internas viga $\overline{AB}$

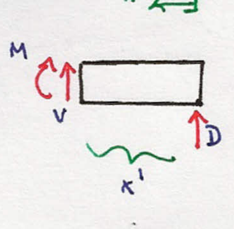


$$M(x) = A x - M_A - w_0 \frac{x^2}{2} = w_0 L x - B_1 x - w_0 \frac{L^2}{2} + B_1 L - w_0 \frac{x^2}{2} \quad (1)$$

$$V(x) = w_0 x - A = w_0 (x - L) + B_1 \quad (1)$$

• Cálculo cargas internas viga BD (se usa x' para denotar la posición desde la derecha)

ojo con la orientación

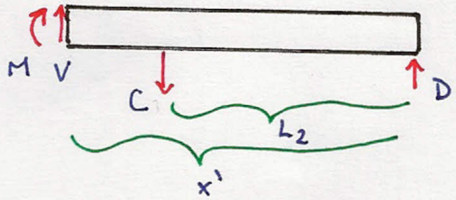


$$L_2 > x' > 0 \quad (1)$$

$$M(x') = D x' = B_2 \frac{L_1}{L_2} x'$$

$$V(x') = -D = -B_2 \frac{L_1}{L_2} \quad (1)$$

5]



$L_1 + L_2 > x' > L_2$

$$M(x') = Dx' - C(x' - L_2)$$
$$= B_2 \frac{L_1}{L_2} x' - \frac{B_2}{L_2}(L_1 + L_2)(x' - L_2)$$
$$= B_2 (L_2 + L_1 - x')$$

1

$$V(x') = C - D = \frac{B_2}{L_2}(L_1 + L_2) - B_2 \frac{L_1}{L_2} = B_2$$

1

- Energía viga $\overline{AB}$

por flexión $U_{T_f} = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{M(x)^2}{I_z} dx$

1

por corte (sección rectangular) $U_{T_C} = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$

- Energía viga $\overline{BD}$

flexión $U_{T_f} = \int_0^{L_1 + L_2} \frac{1}{2E} \frac{M(x')^2}{I_z} dx'$

1

corte $U_{T_C} = \frac{3}{5} \int_0^{L_1 + L_2} \frac{V(x')^2}{GA} dx'$

- El desplazamiento en B calculado con la energía acumulada en $\overline{AB}$ debe ser igual al desplazamiento calculado en B usando la energía en $\overline{BD}$ 2

- Desplazamiento en B usando U_{T_f} y U_{T_C} en $\overline{AB}$

$$\delta_B = \frac{\partial U_{T_f}}{\partial B_1} + \frac{\partial U_{T_C}}{\partial B_1} = \frac{1}{EI_z}\int_0^L M(x) \frac{\partial M}{\partial B_1} dx + \frac{6}{5}\frac{1}{GA}\int_0^V V(x) \frac{\partial V}{\partial B_1} dx$$

$$= \frac{1}{EI_z}\int_0^L \left[\left(\omega_0 L x - B_1 x - \omega_0 \frac{L^2}{2} + B_1 L - \omega_0 \frac{x^2}{2}\right)(L - x) \right] dx$$

$$+ \frac{6}{5GA}\int_0^L \left[\omega_0 (x - L) + B_1 \right] dx$$

$$= \left(B_1 \frac{L^3}{3} - L^4 \frac{\omega_0}{8} \right) \frac{1}{EI_z} + \frac{6}{5AG}\left(B_1 L - L^2 \frac{\omega_0}{2} \right) \quad (*) \quad 2$$

• Desplazamiento en B en $\overline{BD}$

$$\delta_B = \frac{\partial U_{T_f}}{\partial B_2} + \frac{\partial U_{T_c}}{\partial B_2}$$

$$= \frac{1}{EI_3}\left\{ \int_0^{L_1} M(x')\frac{\partial M}{\partial B_2}\, dx' + \int_{L_1}^{L_1+L_2} M(x')\frac{\partial M}{\partial B_2}\, dx' \right\}$$

$$+ \frac{6}{5GA}\left\{ \int_0^{L_1} V(x')\frac{\partial V}{\partial B_2}\, dx' + \int_{L_1}^{L_1+L_2} V(x')\frac{\partial V}{\partial B_2}\, dx' \right\}$$

pero $0 < x' < L_1$ $\qquad$ $L_1 < x' < L_1 + L_2$

$$\frac{\partial M}{\partial B_2} = \frac{L_1}{L_2}x' \quad \frac{\partial V}{\partial B_2} = -\frac{L_1}{L_2} \qquad \frac{\partial M}{\partial B_2} = L_2 + L_1 - x' \quad \frac{\partial V}{\partial B_2} = 1$$

$$\Rightarrow \delta_B = \frac{1}{EI_3}\left\{ \int_0^{L_1} B_2 \frac{L_1}{L_2}x' \frac{L_1}{L_2}x' dx' + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \left[B_2(L_2+L_1-x')(L_2+L_1-x')\right] dx' \right\}$$

$$+ \frac{6}{5GA}\left\{ \int_0^{L_1} -B_2\frac{L_1}{L_2}\left(-\frac{L_1}{L_2}\right) dx' + \int_{L_1}^{L_1+L_2} B_2\, dx' \right\}$$

$$= \frac{1}{EI_3}\left(\frac{B_2 L_1^5}{3L_2^2} + \frac{B_2 L_2^3}{3} \right) + \frac{6}{5AG}\left(\frac{B_2 L_1^3}{L_2^2} + B_2 L_2 \right) \quad 1 \quad (**)$$

luego igualando de (*) y (**) se tiene (despejando, por ejemplo, B_2 en términos de B_1)

$$(\Delta) \quad B_2 = \frac{L L_2^2\left[8B_1(18EI_3 + 5AGL^2) - 3L(24EI_3 + 5AGL^2)w_0\right]}{8\left[18EI_3(L_1^3 + L_2^3) + 5AG(L_1^5 + L_2^5)\right]} \quad 1$$

Pero para el equilibrio del pasador se tenía de (*)

$B_1 + B_2 = F_R$ con $F_R = -\delta_B k \leftarrow$ resorte

1

7)

usando (A) en (*) se puede despejar para B_1 y se tiene

$$B_1 = \frac{L^2\left[\frac{24k}{AG} + \frac{5kL^2}{EI_z} + \frac{15(24EI_z + 5AGL^2)L_2^2}{18EI_z(L_1^3+L_2^3) + 5AG(L_1^5+L_2^5)}\right]w_0}{40\left[\frac{6kL}{5AG} + 1 + \frac{kL^3}{3EI_z} + \frac{L(18EI_z + 5AGL^2)L_2^2}{18EI_z(L_1^3+L_2^3)+5AG(L_1^5+L_2^5)}\right]}$$ (1)

se tiene $I_z = 0.07 * \frac{0.13^3}{12}\ m^4$ $A = 0.07 * 0.13\ m^2$

evaluando con los datos del problema se tiene

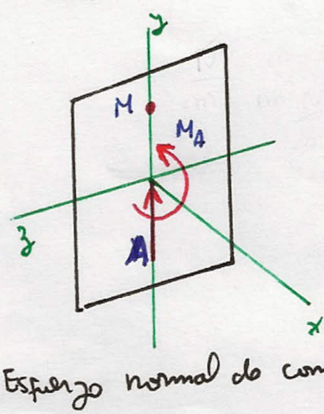
$B_1 = 1477.76\ N$ $B_2 = -1052.24\ N$ ← el signo negativo está correcto, pues en realidad la viga $\overline{BD}$ "resiste" la deformación causada por la interacción con $\overline{AB}$

(2) $\delta_B = -0.000851\ m$
$= -0.0851\ mm$

• Cálculo de reacciones en A (de página [3])

(0.5) $A = w_0 L - B_1 = 4522.24\ N$ $M_A = \frac{w_0 L^2}{2} - B_1 L = 3044.48\ Nm$ (0.5)

sección en A



Punto M

• Esfuerzo de corte τ_{xy} por carga de corte A

$\tau_{xy} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sección} \\ \text{rectangular}}}{=} \frac{V}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$ $y = \frac{0.13}{2} - 0.02$

$V = 4522.24$ (1)

$\Rightarrow \tau_{xy} = 388149.87\ Pa$

• Esfuerzo normal de compresión σ_x por flexión asociada a M_A

$\sigma_x = -\frac{M_A y}{I_z} = -10.69\ MPa$ (1) $y = \frac{0.13}{2} - 0.02$

④ a) Ecuaciones de equilibrio ② $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0$ ↙ sin tiempo

↑ sin fuerzas de cuerpo

$\tau_{11} = \frac{\beta}{3}(x_2^3 - x_1^3)$

$\tau_{12} = \beta x_1^2 x_2$ ① $\tau_{22} = -\beta x_1 (x_1^2 + x_2^2)$

por verificar

$\underbrace{\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} = 0}$ ① $\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} = 0$

① $-\beta x_1^2 + \beta x_1^2 = 0$ ✓ $2\beta x_1 x_2 - 2\beta x_1 x_2 = 0$ ✓ ①

luego $\underset{\sim}{T}$ satisface las ecuaciones

b) Ecuaciones de equilibrio caso general cuasi-estático

(*) ① $\tau_{ij,j} + \rho b_i = 0$ luego $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$

$\Rightarrow \varepsilon_{kk} = u_{k,k}$ ①

$\Rightarrow \tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda \delta_{ij} u_{k,k}$

$\Rightarrow \tau_{ij,j} = \mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda \delta_{ij} u_{k,kj}$ ①

luego en (*) se tiene

② $\mu(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda \delta_{ij} u_{k,kj} + \rho b_i = 0 \quad i = 1,2,3$

por otro lado como $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \Rightarrow \delta_{ij} u_{k,kj} = u_{k,ki}$

$\Rightarrow \mu u_{i,jj} + (\mu + \lambda) u_{j,ij} + \rho b_i = 0$ si $u_{j,ij} = u_{j,ji}$

① considerando que k y j son índices mudos la superficie del cuerpo ∂B se divide en dos partes

$$\partial B = \partial B_t \cup \partial B_u \quad \text{con} \quad \partial B_t \cap \partial B_u = \emptyset$$

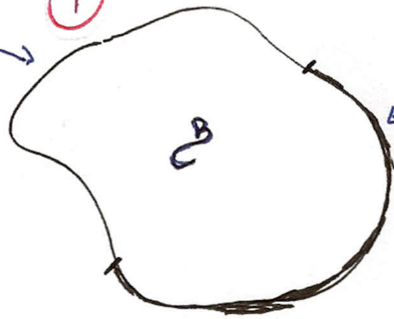
1

∂B_u 1

$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\hat{u}}$

↑

restriccion al desplazamiento conocido



∂B_t 1

se tiene $\underset{\sim}{T}\,\underset{\sim}{n} = \underset{\sim}{\hat{t}}$ carga externa conocida