

Examen, Resistencia de Materiales ME3202

2do semestre 2012

Profesor: R. Bustamante

1. (16 puntos) En la Figura 1 se tiene un mecanismo sencillo. La polea G se conecta a la barra $ACDF$ en un pasador en C . El disco G pesa 5kN . Encuentre la fuerza en la barra FH .

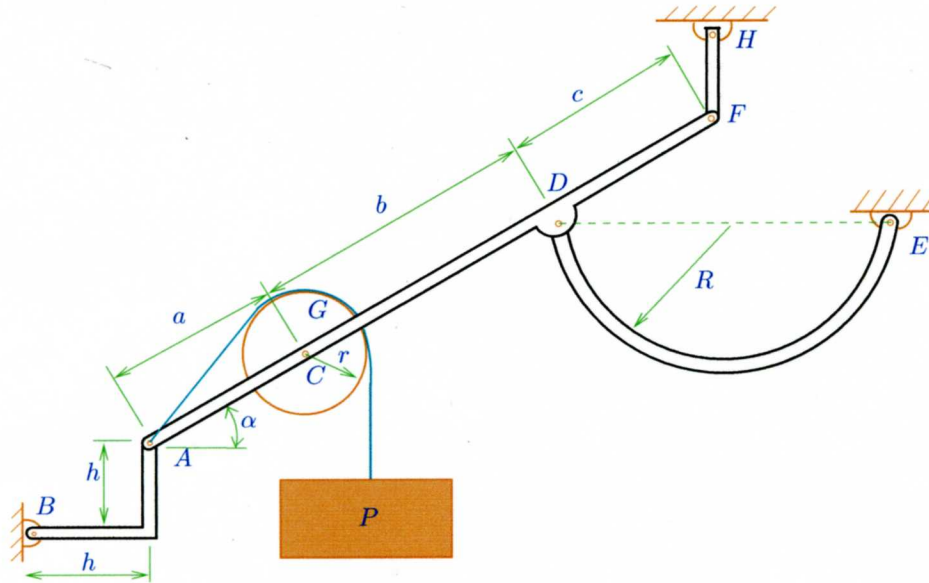


Figura 1: Mecanismo.

Datos: $a = 40\text{cm}$, $b = 60\text{cm}$, $c = 40\text{cm}$, $R = 35\text{cm}$, $h = 20\text{cm}$, $r = 15\text{cm}$, $P = 15\text{kN}$, $\alpha = 30^\circ$.

2. En la Figura 2 se tiene una vista de una columna de módulo de elasticidad E , que tiene dos secciones transversales distintas. Una superior con área A_s y la inferior con área A_i . La columna está bajo el efecto de una fuerza uniformemente distribuida con densidad de carga γ tal como se muestra en la misma figura. La columna está separada en una distancia e de dos columnas con módulo de elasticidad E_c , largo inicial h y área de sección A_c .
- (11 puntos) Determine si la columna central hace contacto con las columnas inferiores¹.
 - (13 puntos) En el caso que lo haga, calcule la fuerza de reacción de dicho punto de contacto.
 - (6 puntos) Determine el desplazamiento del extremo libre de la columna central.

Datos: $\gamma = 2 \cdot 10^6 \text{N/m}$, $l = 60\text{cm}$, $H = 80\text{cm}$, $A_i = 0,003\text{m}^2$, $A_s = 0,013\text{m}^2$, $e = 1\text{mm}$, $E = 10^{11} \text{Pa}$, $E_c = 2 \cdot 10^{11} \text{Pa}$, $A_c = 0,00028\text{m}^2$, $h = 50\text{cm}$.

¹En este problema no considere pandeo.

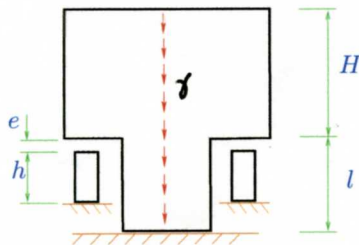


Figura 2: Columna.

3. (25 puntos) En la Figura 3 se tiene una vista de una viga doble T empotrada en un extremo y en el otro conectada a un alambre cuya tensión es $T = 20\text{kN}$. En A cuya posición es

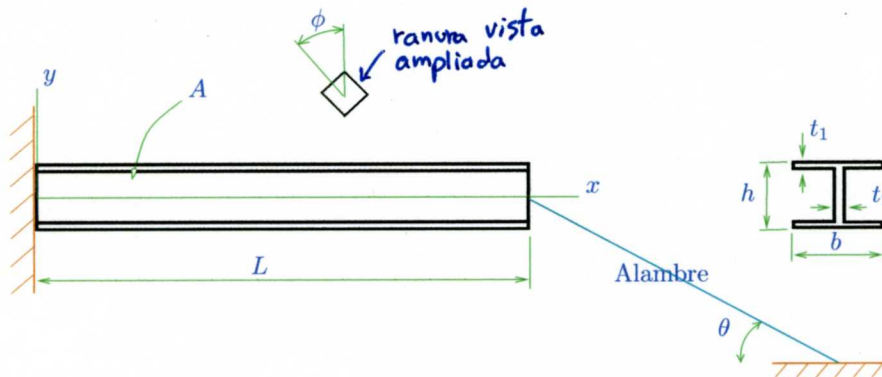


Figura 3: Viga y alambre.

$\vec{r}_A = 0,4\hat{i} + \frac{h}{4}\hat{j}$ [m] se hace una ranura que se ilustra (de manera ampliada) en la parte superior. El lado de la ranura antes de ensamblar el sistema mide 1cm por lado. ¿Qué incremento en la longitud experimentan las aristas de la ranura durante el ensamblaje? ¿Qué cambio experimentan los ángulos que forman las aristas?

Datos: $L = 2\text{m}$, $b = 20\text{cm}$, $h = 30\text{cm}$, $t_1 = 1\text{cm}$, $t_2 = 2\text{cm}$, $\phi = 30^\circ$, $\theta = 20^\circ$, $E = 190\text{GPa}$, $\nu = 0,3$.

4. De respuesta a las siguientes preguntas:

- (5 puntos) En la Figura 4 se tiene un esquema con resultados para un ensayo de fatiga hecho para un cierto material (0.52 %C normalized). Si una pieza hecha de ese material está sometida a un esfuerzo medio $\sigma_m = 20\text{k}\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$, y si para ese material $\sigma_u = 120\text{k}\frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$, con un factor de seguridad $FS = 2$ obtenga el valor del esfuerzo máximo alternante admisible para la aplicación dada.
- (7 puntos) De detalles del ensayo Charpy y que tipo de fenómeno de falla se intenta explorar con él.
- (4 puntos) Para las fotos que se muestran en la Figura 5, indique las posibles causas de falla en cada uno de los casos mostrados ahí.

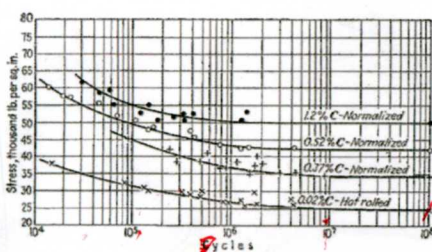


Figura 4: Curva fatiga.

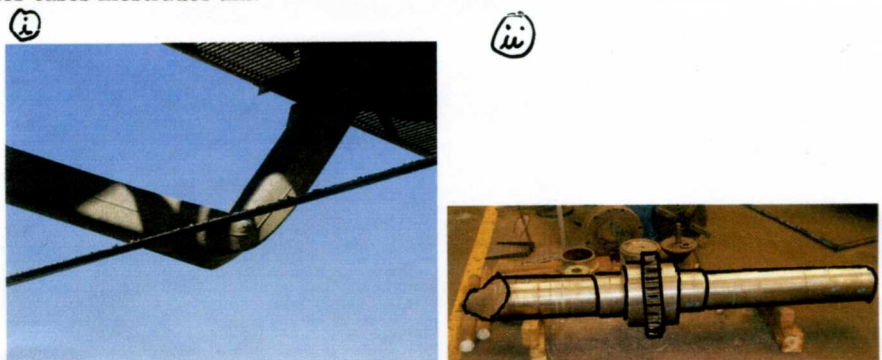


Figura 5: Fotos reales de fallas

Formulario

- Ecuación constitutiva general: $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$, $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$, $\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$, $\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$, $\varepsilon_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{2G}$, $\varepsilon_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{2G}$.

- Caso esfuerzo plano: $\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$, $\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$, $\varepsilon_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{2G}$.

- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{T r}{J}$

- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' dA$. Eje sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$, a base, b altura. Eje sección circular $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$, d diámetro. Triángulo rectángulo $\bar{y} = \frac{b}{3}$, $I_z = \frac{ab^3}{36}$, a base, b altura. Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A$.

- Deflexión

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI_z}, \quad \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI_z}, \quad \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}, \quad \frac{d\hat{y}}{dx} \approx \theta(x),$$

$$\int \delta(x-a) dx = r(x-a), \quad \int r(x-a) dx = (x-a)r(x-a),$$

$$\int (x-a)r(x-a) dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a), \quad \int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a) dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a),$$

- Corte en vigas: Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V(x)}{2I_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$, Sección arbitraria $\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t} \int_y^c \xi dA$.

- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$ (A es el área de la sección transversal).

- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$.

- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.

- Pandeo: Ecuación caso general $\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{w(x)}{EI}$. Solución caso especial $w(x) = 0$, $\hat{y}(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + c_3 x + c_4$.

Ecuación caso columna excéntrica: $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} + \frac{P}{EI} \hat{y} = -\frac{Pe}{EI}$, e excentricidad, L largo total columna.

Solución $\hat{y}(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) - e$. Caso $\hat{y}(0) = 0$ y $\hat{y}(L) = 0$, $C_1 =$

$$\frac{e[1 - \cos(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L)]}{\sin(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} L)}, \quad C_2 = e.$$

- $FS = \frac{S'_n}{\sigma_{adm}} \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)$

Figura 4

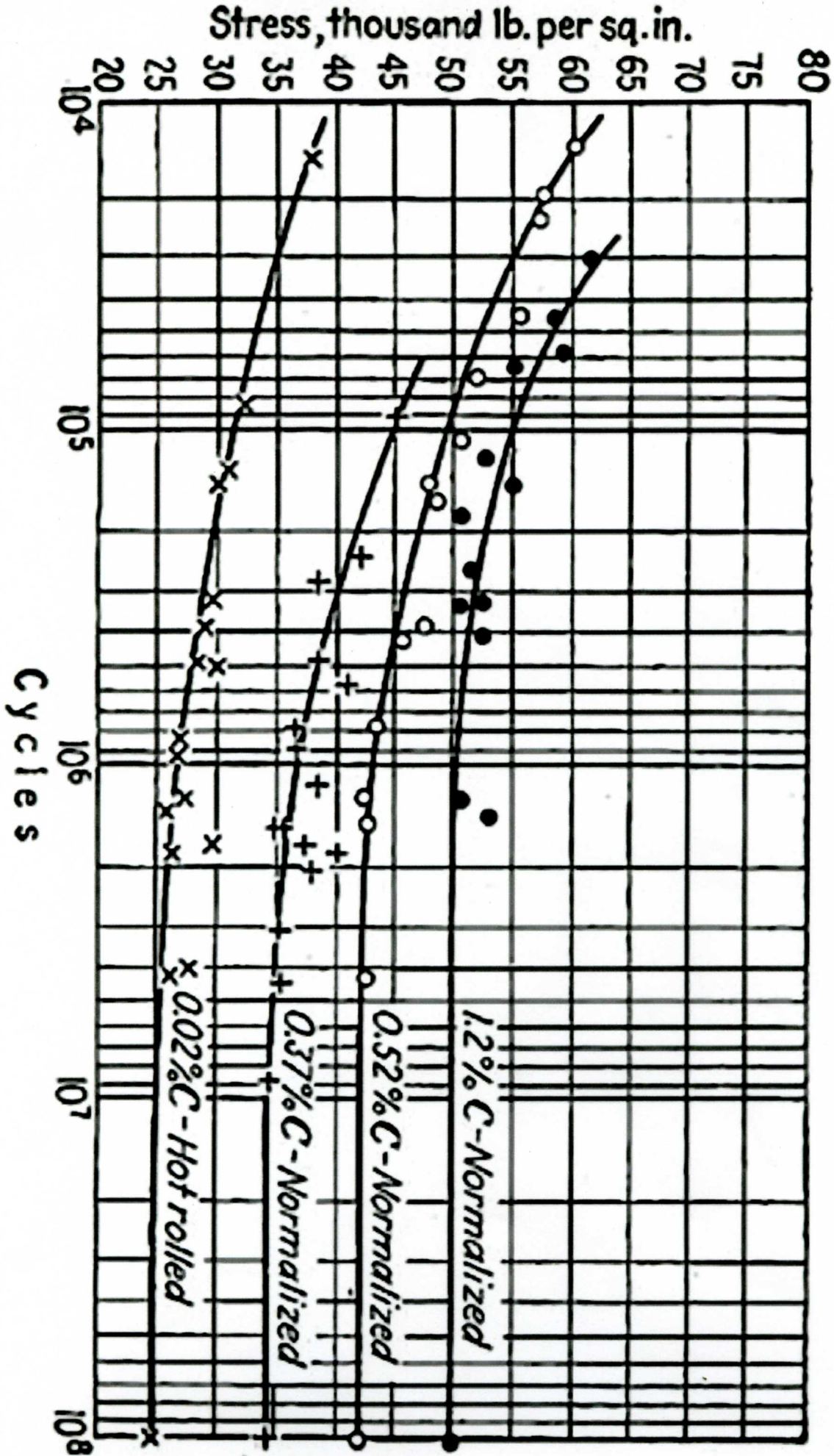
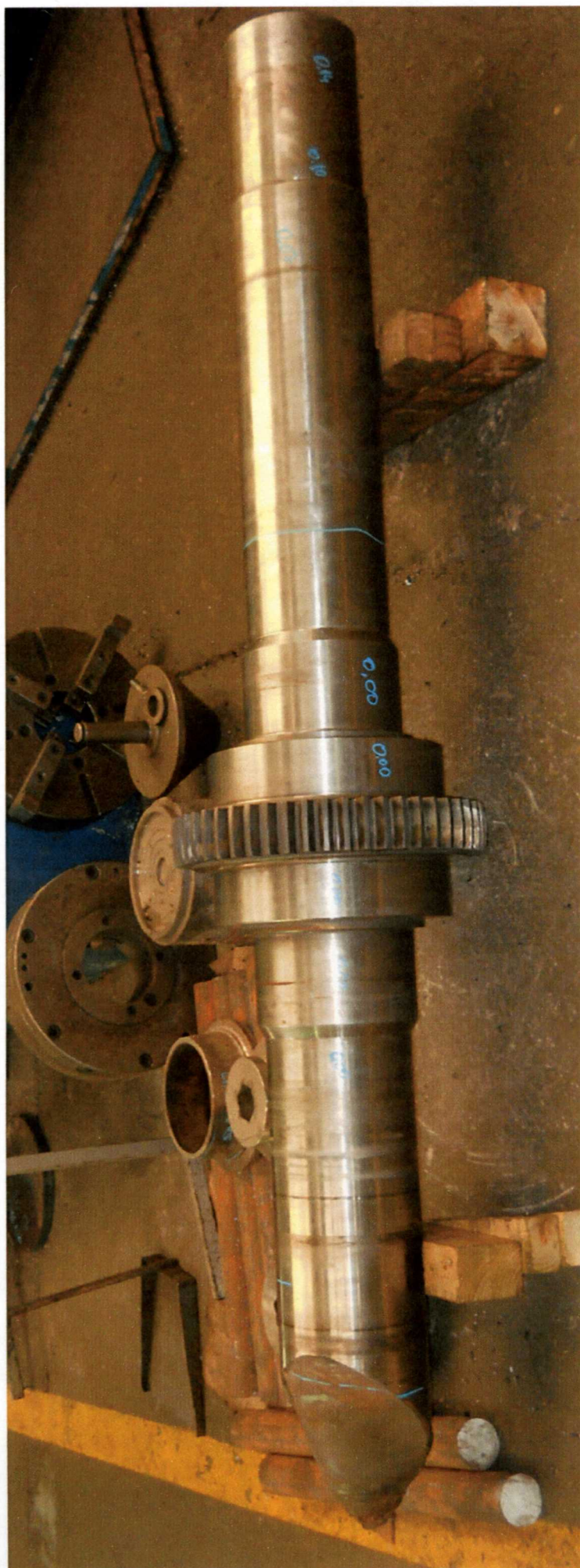


Figura 5 (i)

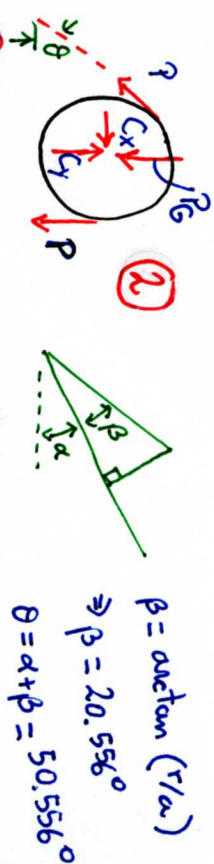


Figura 3 (ii)



P1

DCL Polea G

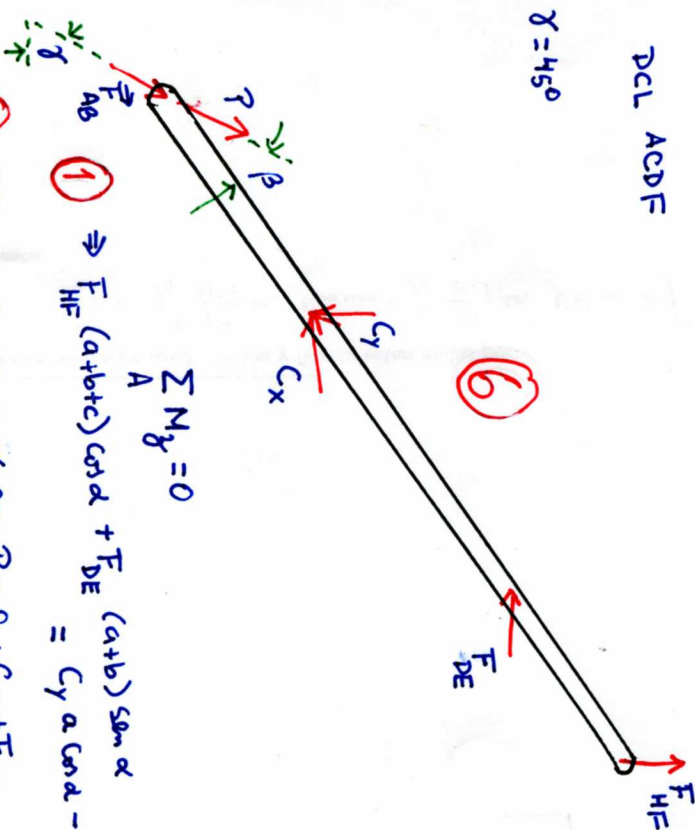


$C_x = P \cos \theta = 9.5299 \text{ kN}$
 $C_y = P + P \sin \theta = 31.5837 \text{ kN}$

DCL ACD F

$\gamma = 45^\circ$

6



$\sum M_B = 0$

$\Rightarrow F_{HF} (a+b) \cos \alpha + F_{DE} (a+b) \sin \alpha = C_y a \cos \alpha - C_x a \sin \alpha$

$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{AB} \cos \gamma - P \cos \theta + C_x + F_{DE}$

$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_{AB} \sin \gamma = -P \sin \theta + C_y - F_{HF}$

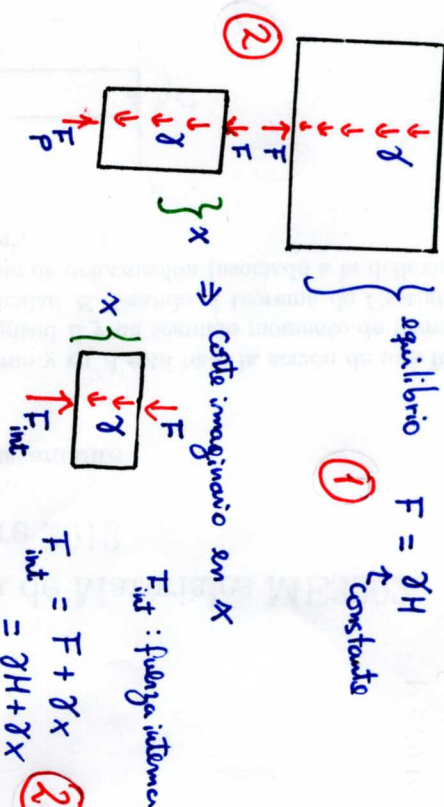
Resolviendo estas tres ecuaciones

$F_{HF} = -1.3546 \text{ kN}$
 $F_{DE} = 21.3546 \text{ kN}$
 $F_{AB} = 30.2 \text{ kN}$

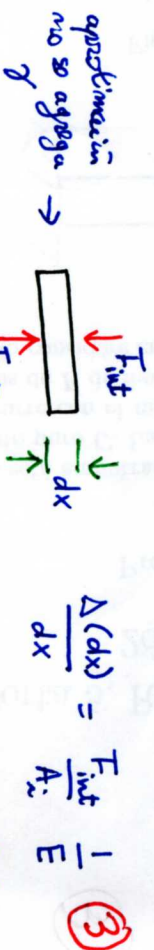
P2

a) Es necesario calcular cuanto se acorta la parte inferior, de longitud inicial h

Corte imaginario en punto h



para un elemento diferencial de longitud inicial dx a una distancia x se tiene



$\Rightarrow \int_0^H \Delta(dx) = \int_0^H \frac{\gamma}{A_1 E} (H+x) dx$
 $= \frac{\gamma}{2 A_1 E} [H^2 + 2 H H + H^2]$
 $= \frac{\gamma H}{2 A_1 E} (2 H + H)$

2

12

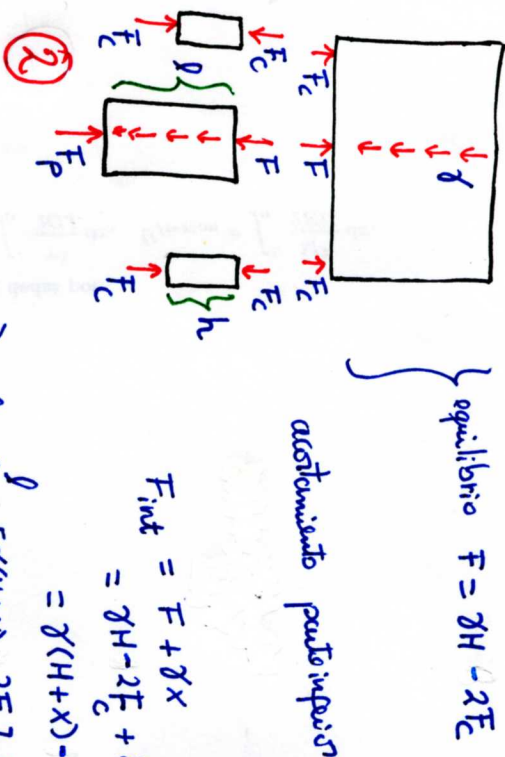
3)

hace contacto si $\gamma \lambda (2H + \lambda) > e$

$$\frac{2A_i E}{0.004H} > 0.001 \quad (1)$$

luego si hace contacto

b)



$$F_{int} = F + \gamma x$$

$$= \gamma H - 2F_c + \gamma x$$

$$= \gamma (H + x) - 2F_c \quad (1)$$

$$\Rightarrow \Delta l = \int_0^l \frac{1}{A_i E} [\gamma (H + x) - 2F_c] dx$$

$$= \gamma (x + H - 2F_c / \gamma) \Big|_0^l$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{\gamma}{2A_i E} [(x + H - 2F_c / \gamma)^2]_0^l$$

$$= \frac{\gamma}{2A_i E} \left[\frac{(l + H - 2F_c / \gamma)^2}{2} - \frac{(H - 2F_c / \gamma)^2}{2} \right]$$

$$= \frac{\gamma}{2A_i E} \left[\frac{l^2 + H^2 + 4F_c^2 / \gamma^2 + 2lH - 4F_c l / \gamma - H^2 + 4F_c^2 / \gamma^2}{2} \right]$$

$$= \frac{[(2H + l)\gamma - 4F_c] l}{2A_i E} = 0.003348 \text{ m} \quad (2)$$

acostumado columna h

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{F_c}{A_c E_c} \frac{1}{E_c} \Rightarrow \Delta h = \frac{F_c h}{A_c E_c} \quad (1)$$

$$\Delta l = e + \Delta h \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{[(2H + l)\gamma - 4F_c] l}{2A_i E} = e + \frac{F_c h}{A_c E_c}$$

$$F_c = \frac{A_c E_c [(2H + l)\gamma - 4F_c] l}{2A_i E h + 4A_c E_c l} \quad (1)$$

$$= 262.983 \text{ N} \quad (2)$$

c) ya se tiene Δl del paso anterior, ahora falta ΔH

Corto desde la parte superior a una distancia x

$$F = \gamma x$$

$$\frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{F}{A_s E} \frac{1}{E} = \frac{\gamma x}{A_s E} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \Delta(dx) = \frac{\gamma x dx}{A_s E}$$

$$\Rightarrow \int_0^H \Delta(dx) = \int_0^H \frac{\gamma x dx}{A_s E}$$

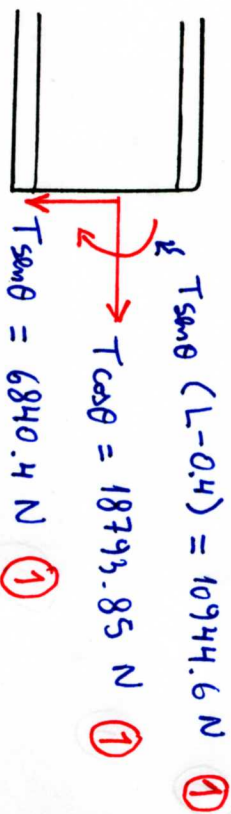
$$\Delta H = \frac{\gamma H^2}{2A_s E} \quad (1)$$

Después sumando total = $\Delta H + \Delta l$

$$= 0.00433268 \text{ m} \quad (2)$$

14

- Cálculo de fuerzas internas



- Cálculo de propiedades de área

$$Área = A = 2bt_1 + (h-2t_1)t_2 = 0.0096 \text{ m}^2$$

eje neutro para por la mitad

$$\begin{aligned} \bar{I}_y &= \frac{t_2}{12} (h-2t_1)^3 + 2 \left[\frac{bt_1^3}{12} + t_1b \left(\frac{h}{2} - \frac{t_1}{2} \right)^2 \right] \\ &= 0.00012072 \text{ m}^4 \quad (1) \end{aligned}$$

- Cálculo de esfuerzos en el sistema x-y

- esfuerzo normal por tracción $T \cos \theta$

$$\sigma_x = \frac{T \cos \theta}{A} = 1.95769 \times 10^6 \text{ Pa} \quad (1)$$

- esfuerzo normal por flexión $T \sin \theta (L-0.4)$

$$\sigma_x = \frac{T \sin \theta (L-0.4) h/4}{\bar{I}_y} = 6.79961 \times 10^6 \text{ Pa} \quad (2)$$

- esfuerzo de corte $\tau_{xy} = -\frac{T \sin \theta}{\bar{I}_y t_2} \int \xi dA$

$$c = h/2$$

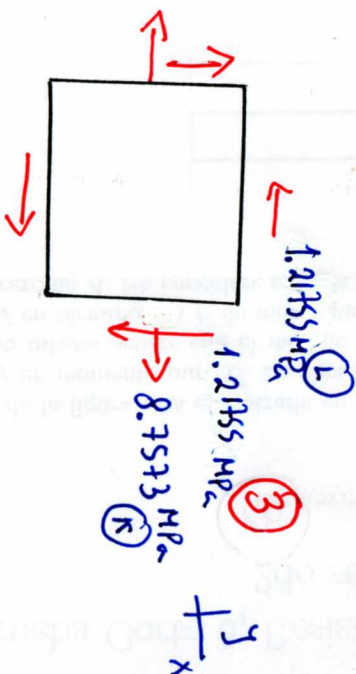
$$dA = \begin{cases} t_2 d\xi & h/4 \leq \xi \leq h-t_1 \\ b d\xi & h-t_1 \leq \xi < h/2 \end{cases}$$

$$\int_{h/4}^{h/2} \xi dA = \int_{h/4}^{h-t_1} \xi t_2 d\xi + \int_{h-t_1}^{h/2} \xi b d\xi$$

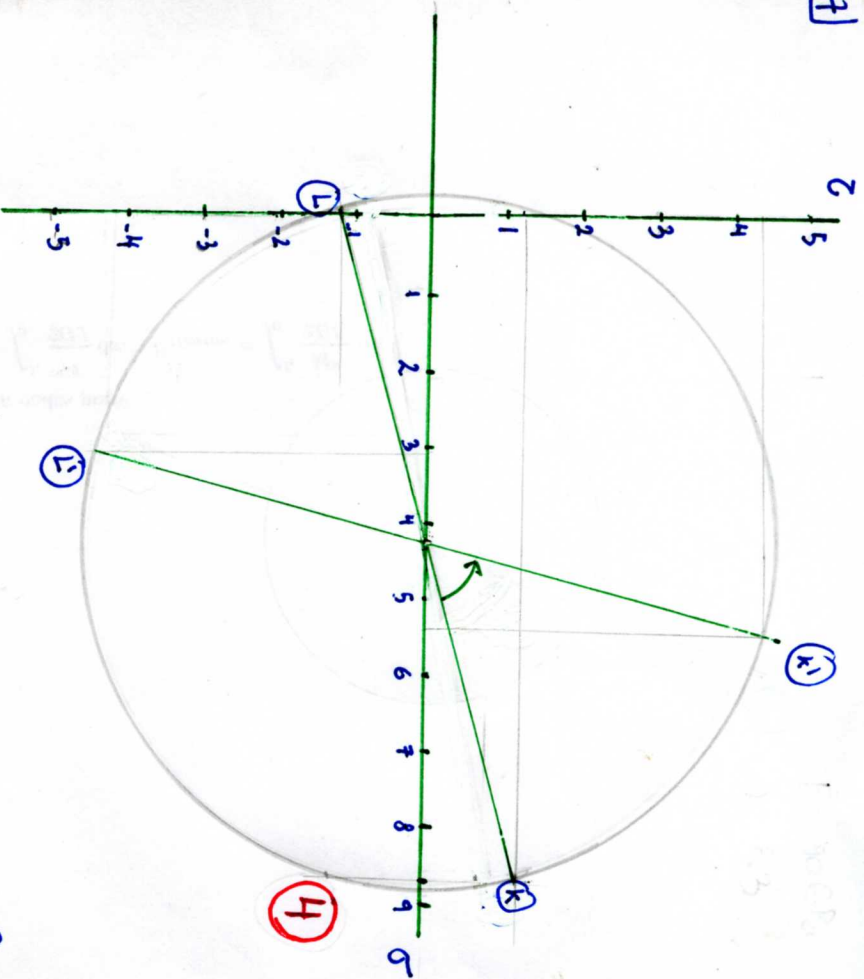
$$= \frac{t_2}{2} \left[\left(\frac{h-t_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{h}{4} \right)^2 \right] + \frac{b}{2} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - \left(\frac{h-t_1}{2} \right)^2 \right] \quad (2)$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = -1.21755 \times 10^6 \text{ Pa} \quad (1)$$

$$\text{Luego } \sigma_{x \text{ total}} = 8.7573 \text{ MPa} \quad (1)$$



con el círculo de Mohr obtenemos el estado de esfuerzos en ϕ 5



on $\sigma_x \approx 5.4 \text{ MPa}$ $\sigma_y \approx 3.1 \text{ MPa}$
 $\tau_{xy} \approx \pm 4.3 \text{ MPa}$

pero $\sigma_{zz} = 0$ $\tau_{xz} = 0$ $\tau_{yz} = 0$ luego en la sucesión
 constitución general tensor

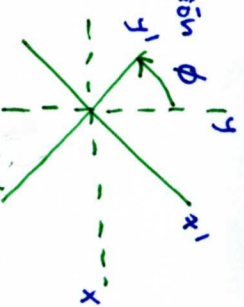
$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) = 2.3526 \cdot 10^{-5}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = 7.7895 \cdot 10^{-6}$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2G} \tau_{xy} = 2.9421 \cdot 10^{-5}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 73.077 \text{ GPa}$$

incremento en la dirección x'
 $x' : 2.3526 \cdot 10^{-3} \%$
 $y' : 7.7895 \cdot 10^{-4} \%$



Cambio promedio de ángulo
 plano $x'-y' : 2.9421 \cdot 10^{-3} \%$

$$FS = \frac{S_m}{\sigma_{adm}} \left(1 - \frac{\sigma_{tm}}{\sigma_u} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_u = 120 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

$$\sigma_m = 20 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2}$$

$$\text{de la Figura 4, } S_m \approx 42 \times 10^3 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \quad (2)$$

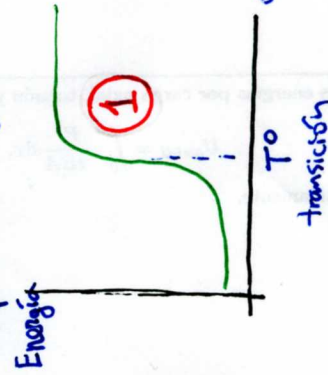
$$FS = 2$$

$$\text{luego } \sigma_{adm} = 17500 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \quad (1)$$

b) La mayor parte de los metales tienen una cierta capacidad de absorber energía por impacto sin romperse.

Para algunas aplicaciones es importante que frente a impactos los componentes mecánicos no se rompan. En energía absorbida puede disminuir de manera brusca con una

temperatura baja.

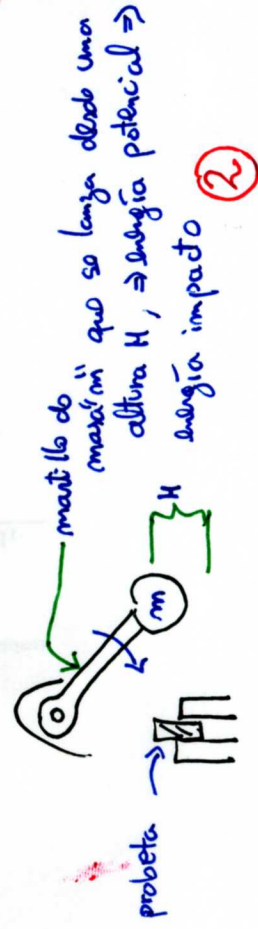


Luego en el ensayo Charpy

en una máquina en donde se hace un impacto controlado,

se busca determinar sea

energía para distintas temperaturas para encontrar T transición (2)



c) En la figura del lado izquierdo vemos una típica falla por pandeo, la parte superior de la estructura sobrepeso el peso crítico y se produjo algo similar al primer modo de falla en pando en donde en ambos extremos la viga está empotrada.

d) En la figura del lado derecho tenemos un eje que seguramente transmite potencia con el torque a una cierta velocidad angular. En el extremo izquierdo se ve una superficie de rotura, quizás se produjo por un torque muy alto, o bien por fatiga asociada a vibraciones torsionales.