

Examen, Resistencia de Materiales ME3202 ME46A
1er semestre 2010

Roger Bustamante

1. La barra de acero AD mostrada en la figura 1 tiene un área transversal de $4[\text{cm}^2]$ y está cargada por fuerzas $P_1 = 2500[\text{N}]$, $P_2 = 1900[\text{N}]$ y $P_3 = 1500[\text{N}]$. Las longitudes de los segmentos de la barra son $a = 70[\text{cm}]$, $b = 25[\text{cm}]$ y $c = 35[\text{cm}]$. (20 puntos)
- a) Suponga que el módulo de elasticidad es $E = 190[\text{GPa}]$ y calcule el cambio de longitud δ de la barra. ¿Se alarga o se acorta la barra?
- b) ¿Cual debería ser la magnitud de P para que el extremo D de la barra no se mueva cuando se aplican las cargas?

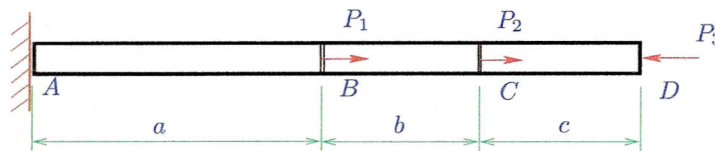


Figura 1: Barra AD .

2. El eje cilíndrico de la Figura 2 está empotrado en sus dos extremos A y H y está siendo sometido a un torque concentrado T_1 y un torque distribuido T_o . Si el módulo de corte es G y el diámetro del cilindro es D , determine los torques de reacción que se producen en el cilindro por la interacción con la pared en los puntos A y H . (25 puntos)

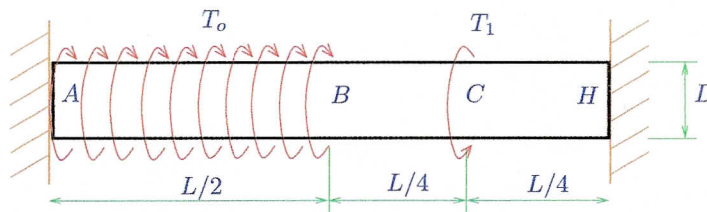


Figura 2: Eje en torsión.

3. La columna rectangular de la Figura 3 con dimensiones transversales b y h está soportada por pasadores en los extremos A y C . A mitad de la altura, la columna está restringida en el plano de la figura pero puede deflexionarse perpendicularmente en el plano de la figura. Determine la razón h/b tal que la carga crítica sea la misma para pandeo en los dos planos principales de la columna. (20 puntos)

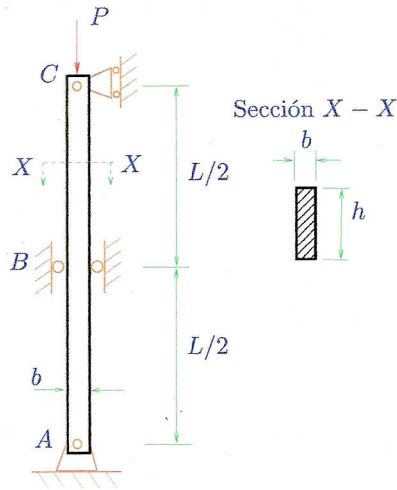


Figura 3: Viga bajo pandeo.

4. Responda las siguientes preguntas conceptuales:

- Quando se estudia el fenómeno de fatiga y si se tiene esfuerzos alternantes σ_a y esfuerzos medios σ_m actuando en el cuerpo: ¿Por qué no interesa estudiar el caso $\sigma_m < 0$? (3 puntos)
- Nombre 3 mecanismos de falla en materiales. (3 puntos)
- Dibuje los siguientes esfuerzos en el cubo diferencial de la Figura 4 (7 puntos):
 - $\sigma_x = 10\text{MPa}$, $\sigma_y = -5\text{MPa}$, $\tau_{xy} = 1\text{MPa}$, $\tau_{yz} = -4\text{MPa}$.
 - $\sigma_{VM} = 100\text{MPa}$.

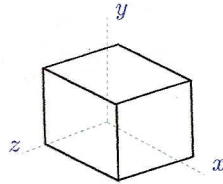


Figura 4: Cubo diferencial

- Para el cuadrado diferencial mostrado en la Figura 5 (el cual tiene un corte diagonal), demuestre que (5 puntos)

$$\sigma_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta).$$

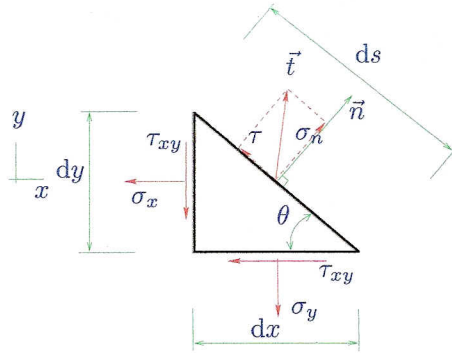


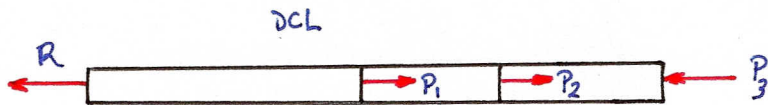
Figura 5: Cuadrado diferencial con corte oblicuo.

Formulario

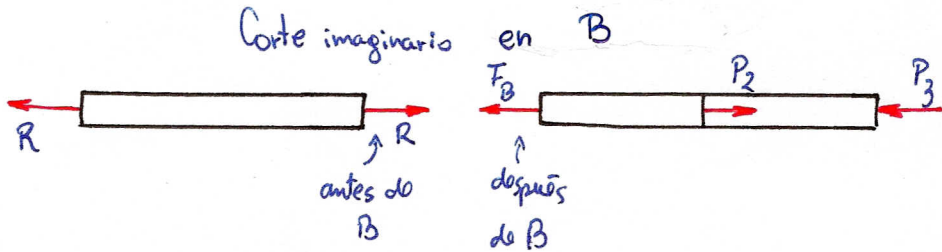
- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{T r}{J}$
- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' dA$. Momento de inercia $I_z = \int_A y^2 dA$. Segundo momento área sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$; sección circular $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$. Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$.
- Corte sección arbitraria: $\tau = \frac{V}{I t} \int_y^c \xi dA$. Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.
- Pandeo: Ecuación caso general $\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{w(x)}{EI}$. Solución caso especial $w(x) = 0$, $\hat{y}(x) = c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + c_3 x + c_4$.
Ecuación caso columna excéntrica: $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} + \frac{P}{EI} \hat{y} = -\frac{Pe}{EI}$.
Otras expresiones $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$, $\frac{d \hat{y}}{dx} \approx \theta$.

Pauta Examen

① a)



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R = P_1 + P_2 - P_3 = 2900 \text{ N} \quad (2)$$

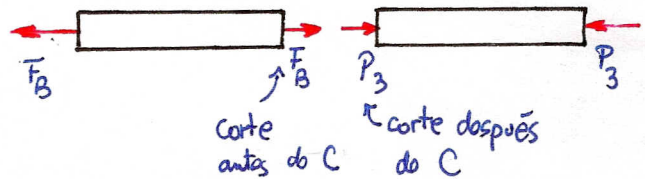


se alarga

$$\Delta a = \frac{R}{A_{\text{rea}}} \frac{1}{E} a$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_B = P_2 - P_3 = 400 \text{ N} \quad (1)$$

Corte imaginario en C



alarga

$$\Delta b = \frac{F_B}{A_{\text{rea}}} \frac{1}{E} b$$

acorta

$$\Delta c = \frac{P_3}{A_{\text{rea}}} \frac{1}{E} c$$

Luego

$$\begin{aligned} \Delta L_{\text{Total}} &= \Delta a + \Delta b - \Delta c \\ &= \frac{1}{A_{\text{rea}} E} (R a + F_B b - P_3 c) \\ &= 2.1118 \times 10^{-5} \text{ m} \\ &= 2.1118 \times 10^{-2} \text{ mm} \end{aligned}$$

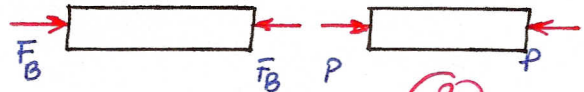
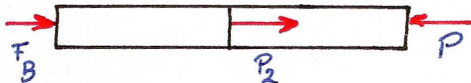
b) Se busca $P_3 = P$ tal que $\Delta L_{\text{Total}} = 0$

Asumamos \overline{AB} está en tracción y \overline{BC} está ahora en compresión (1)



$$R = P_1 + P_2 - P$$

(1)



$$F_B = P - P_2$$

(2)

Se asume $R > 0$, $F_B > 0$

$$\Delta L_{\text{total}} = \frac{1}{\text{Area} E} (R a - F_B b - P c) = 0$$

(3)

$$(P_1 + P_2 - P)a - (P - P_2)b - P c = 0$$

$$\Leftrightarrow P(a + b + c) = (P_1 + P_2)a + P_2 b$$

$$\Rightarrow P = \frac{(P_1 + P_2)a + P_2 b}{a + b + c}$$

(2)

$$\Rightarrow P = 2734.615 \text{ N}$$

(1)

$$\Rightarrow R = 1665.38 > 0$$

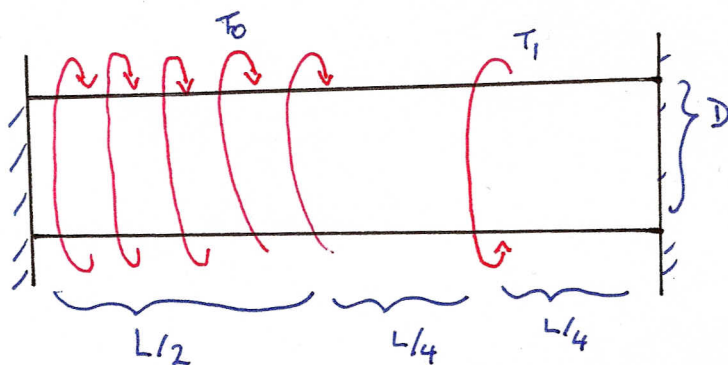
(1)

$$F_B = 834.615 > 0$$

(1)

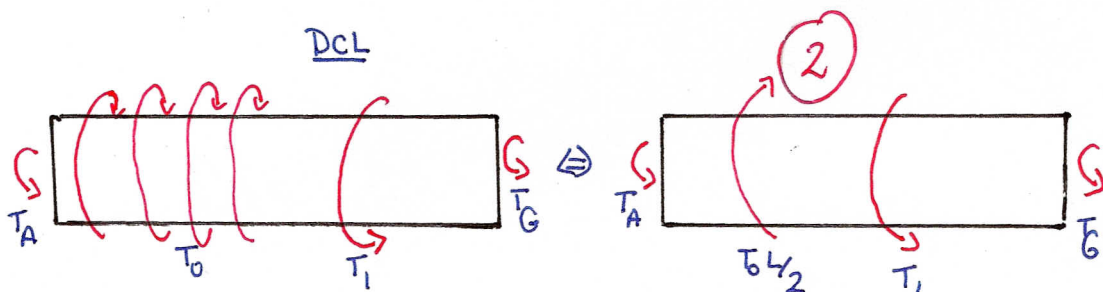
3]

②



T_0 : torque distribuido por u. de largo

DCL

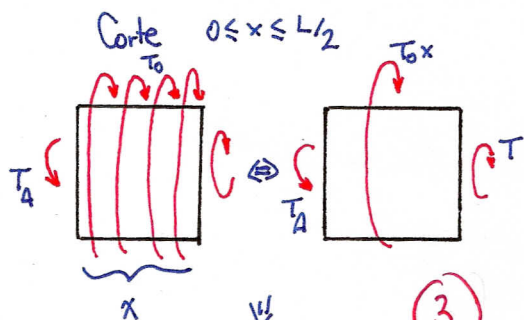


equilibrio al torque: $T_A + T_1 + T_0 \frac{L}{2} = 0$

$$\Rightarrow T_0 = T_0 \frac{L}{2} - T_1 - T_A$$

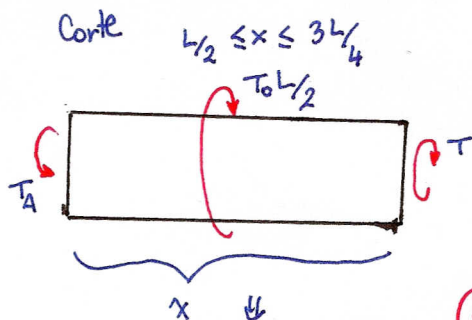
①

Calculo de torque interno (cortes imaginarios)



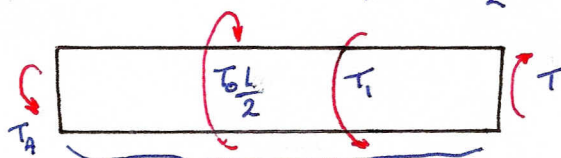
$$T = T_A - T_0 x$$

③



$$T = T_A - T_0 \frac{L}{2}$$

④

Corte $3L/4 \leq x \leq L$ 

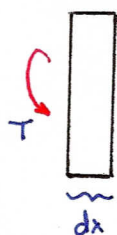
$$\Rightarrow T = T_1 + T_A - T_0 \frac{L}{2} = -T_0$$

①

Ángulo de deformación

4

$$0 < x < L/2$$



$$d\theta = \frac{dx}{GJ} T \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{GJ} (T_A - T_0 x)$$

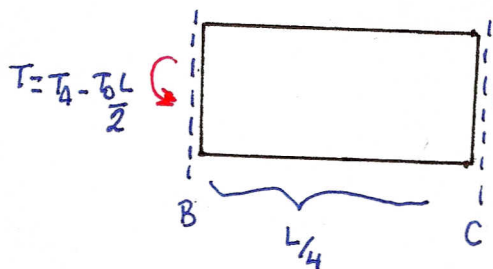
↓

$$\theta = \frac{1}{GJ} (T_A x - T_0 x^2/2) + \theta_0$$

pero en $x=0$ $\theta=0 \Rightarrow \theta_0=0$

Luego en el punto B tenemos $\theta_B = \theta(x=L/2) = \frac{1}{GJ} \frac{L}{2} (T_A - T_0 \frac{L}{4})$ (1)

$L/2 < x < 3L/4$ (se hace un corte imaginario justo después de B y justo antes de C)



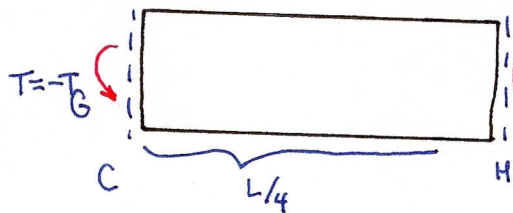
$$T = T_A - T_0 \frac{L}{2} \Rightarrow \theta_{BC} = \frac{T L/4}{GJ} = \frac{(T_A - T_0 \frac{L}{2}) \frac{L}{4}}{GJ}$$

ángulo de torsión relativo entre B y C

(2)

$$\frac{3L}{4} < x < L$$

(se hace un corte justo después de C y justo antes de H)



$$T = -T_0 \Rightarrow \theta_{CH} = \frac{-T_0 L/4}{GJ}$$

ángulo de torsión relativo entre C y H

(1)

• El ángulo total en H debe ser igual a cero puesto está empotrado allí

(3)

$$5] \quad \text{pero } \theta_D = \theta_B + \theta_{BC} + \theta_{CD} = 0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{GJ} \frac{L}{2} \left(T_A - T_0 \frac{L}{4} \right) + \frac{1}{GJ} \frac{L}{4} \left(T_A - T_0 \frac{L}{2} \right) - \frac{1}{GJ} \frac{L}{4} T_0 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(T_A - T_0 \frac{L}{4} \right) + T_A - T_0 \frac{L}{2} - T_0 = 0 \quad (1)$$

de (*)

$$\Leftrightarrow 2 \left(T_A - T_0 \frac{L}{4} \right) + T_A - T_0 \frac{L}{2} - T_0 \frac{L}{2} + T_1 + T_A = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 T_A - T_0 \frac{L}{2} + T_A - T_0 \frac{L}{2} - T_0 \frac{L}{2} + T_1 + T_A = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 T_A - 3 \frac{L}{2} T_0 + T_1 = 0$$

$$\Rightarrow T_A = \frac{3}{8} L T_0 - \frac{T_1}{4}$$

Luego de (*)

$$\Rightarrow T_0 = T_0 \frac{L}{2} - T_1 - \frac{3}{8} L T_0 + \frac{T_1}{4}$$

$$= \frac{L}{8} T_0 - \frac{3}{4} T_1 \quad (1)$$

3)

Plano x-y

solución de

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI_y} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = 0 \text{ es}$$

6

$$\hat{y}(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}} x\right) + C_3 x + C_4$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \quad (1)$$

↓

Condiciones de borde en los extremos

punto A: $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(0) = 0 \Rightarrow -\frac{P}{EI_y} C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ $\hat{y}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$ (1)

punto C: $\hat{y}(L) = 0 \Rightarrow C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}} L\right) + C_3 L = 0$

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(L) = 0 \Rightarrow -C_1 \frac{P}{EI_y} \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}} L\right) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad (1)$$

Solución

$$\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}} L\right) = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI_y}} L = m\pi \quad (1)$$

Debido a la restricción en C el modo de falla por pandeo es el segundo $m=2$, luego $P_{cr} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI_y \quad (4)$

Plano x-z

solución de

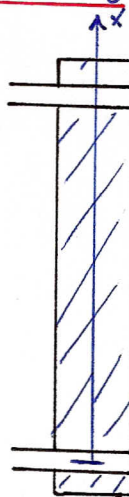
$$\frac{d^4 \hat{z}}{dx^4} + \frac{P}{EI_z} \frac{d^2 \hat{z}}{dx^2} = 0$$

es

$$\hat{z}(x) = d_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) + d_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) + d_3 x + d_4$$

↓

$$\frac{d \hat{z}}{dx} = d_1 \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) - d_2 \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}} x\right) + d_3$$



$$\begin{aligned} \hat{z}(L) &= 0 \\ \frac{d \hat{z}}{dx}(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

↑ empotrado

$$\begin{aligned} \hat{z}(0) &= 0 \\ \frac{d \hat{z}}{dx}(0) &= 0 \leftarrow \text{empotrado} \end{aligned} \quad (2)$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} \quad (1)$$

7] sea $\gamma = \sqrt{\frac{P}{EI_y}}$

Luego $\frac{d\hat{z}}{dx}(0) = 0 \Rightarrow d_1\gamma + d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = -d_1\gamma$

$\hat{z}(0) = 0 \Rightarrow d_2 + d_4 = 0 \Rightarrow d_4 = -d_2$

$\hat{z}(L) = 0 \Rightarrow d_1 \sin(\gamma L) + d_2 \cos(\gamma L) - d_1\gamma L - d_2 = 0$

$\frac{d\hat{z}}{dx}(L) = 0 \Rightarrow d_1\gamma \cos(\gamma L) - d_2\gamma \sin(\gamma L) - d_1\gamma = 0$

$$\begin{pmatrix} \sin(\gamma L) - \gamma L & \cos(\gamma L) - 1 \\ \gamma \cos(\gamma L) - \gamma & -\gamma \sin(\gamma L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

solución no trivial aparece cuando el determinante de esta matriz es cero

\Downarrow

$$\gamma^2 L \sin(\gamma L) + 2\gamma \cos(\gamma L) - 2\gamma = 0$$

\Downarrow

$$\gamma (\gamma L \sin(\gamma L) + 2 \cos(\gamma L) - 2) = 0$$

$\gamma = 0$ solución trivial

$\gamma L \sin(\gamma L) + 2 \cos(\gamma L) - 2 = 0$ \Leftarrow solución no trivial

primera solución en $\gamma L = 2\pi \Rightarrow \gamma = \frac{2\pi}{L}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI_y}} = \frac{2\pi}{L} \Rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI_y$

(1)

La carga crítica en ambos planos debe ser la misma

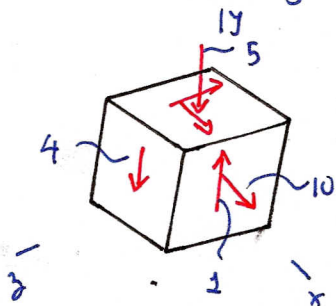
8

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2}{L^2} E I_z = \frac{4\pi^2}{L^2} E I_y \Leftrightarrow \boxed{h=b} \quad (2)$$

9) a) La falla por fatiga se puede asociar al crecimiento de pequeñas grietas en el interior de un cuerpo debido a las cargas cíclicas. Pero las grietas no crecen cuando están sometidas a cargas de compresión, las cuales tienden a cerrarlas (si están en dirección paralela al vector normal a la grieta), luego por este motivo no interesaría estudiar el caso $\sigma_m < 0$ (3)

- b)
- Deformación plástica (1)
 - Rotura (1)
 - Inestabilidad elástica (1)

c) • $\sigma_x = 10$ $\sigma_y = -5$ $\tau_{xy} = 1$ $\tau_{yz} = -4$



(4)

- $\sigma_{vm} = 100$ \Leftarrow el esfuerzo de Von Mises no se puede graficar en un cubo diferencial debido a que es una expresión asociada a la energía deviatorica acumulada por el cuerpo \Rightarrow no es realmente un esfuerzo (3)

d) $\Sigma F_{\text{normal}} = 0 \quad \Leftarrow \text{equilibrio para el elemento}$

10

② $\sigma_m ds - \sigma_y \cos \theta dx - \tau_{xy} \sin \theta dx - \sigma_x \sin \theta dy - \tau_{xy} \cos \theta dy = 0$

$\Rightarrow \sigma_m = \sigma_y \cos \theta \frac{dx}{ds} + \tau_{xy} \sin \theta \frac{dx}{ds} + \sigma_x \sin \theta \frac{dy}{ds} + \tau_{xy} \cos \theta \frac{dy}{ds}$

① pero $\frac{dx}{ds} = \cos \theta$ y $\frac{dy}{ds} = \sin \theta$

$\Rightarrow \sigma_m = \sigma_y \cos^2 \theta + \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \sigma_x \sin^2 \theta + \tau_{xy} \cos \theta \sin \theta$

① $= \frac{1}{2} (\sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \sigma_y \sin^2 \theta - \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_x \sin^2 \theta) + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$

$= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

$+ 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$

① $= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \cos(2\theta) + \underbrace{2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta}_{\tau_{xy} \sin(2\theta)}$