ME3204 δ_{ij}
Mecánica de Sólidos

Auxiliar N°7

8 de Julio de 2015

Profesor Cátedra: Roger Bustamante P.
Profesor Auxiliar: Rodrigo Bahamondes S.

Consultas a: **rbahamondes@ing.uchile.cl**

P1.- Notación indicial (símbolos básicos)

a) Demuestre las siguientes propiedades

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = (\mathbf{A}\mathbf{u})\otimes\mathbf{v}$$
$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}$$
$$\mathrm{tr}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

b) Demuestre las siguientes propiedades del símbolo de permutacion:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$
$$\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{imn} = 2\delta_{ij}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6$$

c) Usando las propiedades del símbolo de permutación, demuestre que:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = -\lambda^3 + \lambda^2\mathrm{tr}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\lambda\left[(\mathrm{tr}\mathbf{A})^2 - \mathrm{tr}(\mathbf{A}^2)\right] + \det\mathbf{A}$$

P2.- Notación indicial (Operadores Diferenciales)

a) Evalue las derivadas de los invariantes I_1 e I_2 del tensor **T**:

$$\frac{\partial(\mathrm{I}_1)}{\partial\mathbf{T}} \qquad \frac{\partial(\mathrm{I}_2)}{\partial\mathbf{T}}$$

b) Demuestre las siguientes propiedades (A_{mn} constantes)

$$\nabla(A_{mn}x_m x_n) = (A_{pn} + A_{np})x_n\mathbf{e}_p$$
$$\mathrm{div}(\Phi\mathbf{u}) = \Phi\ \mathrm{div}\ \mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\mathrm{grad}\ \Phi$$
$$\mathrm{grad}(\Phi\mathbf{u}) = \mathbf{u}\otimes\mathrm{grad}\ \Phi + \Phi\mathrm{grad}\ \mathbf{u}$$

c) Sea **A** un campo tensorial de 2º orden. Utilizando el teorema de la divergencia, demuestre que:

$$\int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{n} = \int_{B} \mathrm{div}\mathbf{A}^{T}\mathbf{u}\, da$$

donde ***B*** es un volumen cerrado, ***dB*** es la superficie que encierra dicho volumen, $()^{T}$ es la traspuesta de un tensor y **n** es un vector unitario normal exterior a la superficie en ***dB***.

P3.- (Esfuerzos Principales) En un eje circular sólido sujeto a torsión pura, el campo de esfuerzos está dado por:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Cx_2 \\ 0 & 0 & Cx_1 \\ -Cx_2 & Cx_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde *C* es una constante. En el punto *(1,2,4)*, encuentre:

a) Los esfuerzos principales
b) Las direcciones principales
c) El esfuerzo de corte máximo