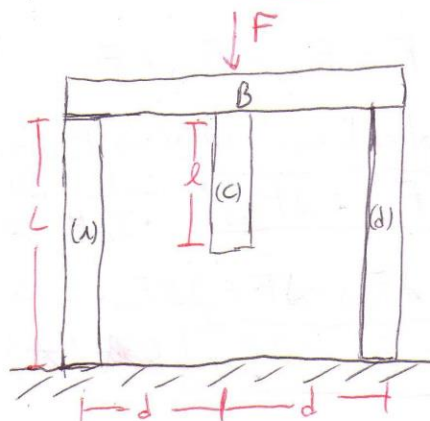


Pauta Aux. N°3 ME3202

P1)



A, E

• Se deben distinguir dos casos

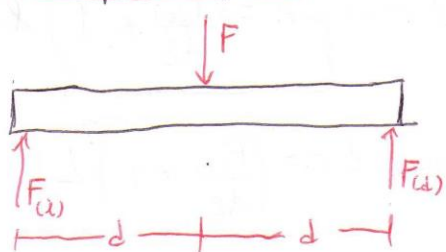
↳ Si barra (c) toca el suelo

↳ Si barra (c) NO toca el suelo

* Existirá una restricción en la fuerza F que distinguirá ambos casos

I) Barra (c) NO toca el suelo

→ DCL placa rígida



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F = F_{(a)} + F_{(d)}$$

$$\sum M_{(a)} = 0 \Rightarrow -dF + 2dF_{(d)} = 0$$

$$\therefore F_{(d)} = F_{(a)} = \frac{F}{2}$$

* El acortamiento es el mismo en ambas columnas, luego, utilizando Ley de Hooke:

$$\sigma_{(a)} = \sigma_{(d)} = \frac{F}{2A} \Rightarrow \sigma = \epsilon E \leadsto \frac{F}{2A} = \frac{\Delta L}{L} \cdot E$$

Acortamiento

$$\therefore \Delta L = \frac{FL}{2AE}$$

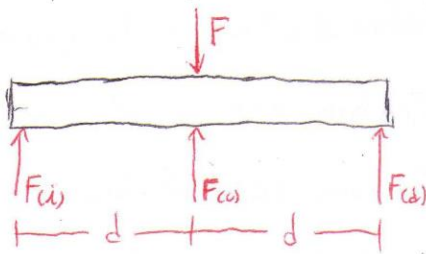
* Existe una restricción, que el acortamiento sea menor a la distancia entre el extremo inferior de (c) y el suelo (Así no se generen resacas):

$$\Delta L < (L - l)$$

$$\frac{FL}{2AE} < (L - l) \Rightarrow F < 2AE \cdot \frac{(L - l)}{L}$$

II) Barra (c) toca el suelo

→ DCL placa rígida



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = F_{ci} + F_{cc} + F_{cd}$$

→ Si, F está aplicada en el centro $\Rightarrow F_{ci} = F_{cd}$

$$\therefore F = F_{cc} + 2F_{cd} \quad (\text{También sale de } \sum M_b = 0)$$

$$\sum_{(i)} M_z = 0 \Rightarrow \cancel{\delta F_{cc}} - \delta F + 2\delta F_{cd} = 0$$

$$\therefore F = F_{cc} + 2F_{cd} \quad (\star)$$

* Hace falta una ecuación más para obtener las reacciones

→ Largo final (L_F) de todas las barras es el mismo

$$\bullet \text{ Barra (c): } \sigma_c = E \cdot \varepsilon_c \Rightarrow \frac{F_{cc}}{A} = E \frac{(L_F - l)}{l} \leadsto L_F = \left(\frac{F_{cc}}{AE} + 1 \right) l \quad (i)$$

$$\bullet \text{ Barra (d): } \sigma_d = E \cdot \varepsilon_d \Rightarrow \frac{F_{cd}}{A} = E \frac{(L_F - L)}{L} \leadsto L_F = \left(\frac{F_{cd}}{AE} + 1 \right) L \quad (ii)$$

* $(i) = (ii)$

$$\left(\frac{F_{cd}}{AE} + 1 \right) = \frac{l}{L} \left(\frac{F_{cc}}{AE} + 1 \right) \Rightarrow \frac{F_{cd}}{AE} = \frac{l(F - 2F_{cd})}{LAE} + \frac{l}{L} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{F_{cd}}{AE} \left(\frac{l}{L} + \frac{2l}{L} \right) = \frac{l}{L} \cdot \frac{F}{AE} + \frac{l - L}{L}$$

$$\therefore F_{cd} = F_{ci} = \frac{lF + AE(l - L)}{L + 2l}$$

$$\text{en } (\star) \quad F_{cc} = \frac{lF + 2AE(L - l)}{L + 2l}$$

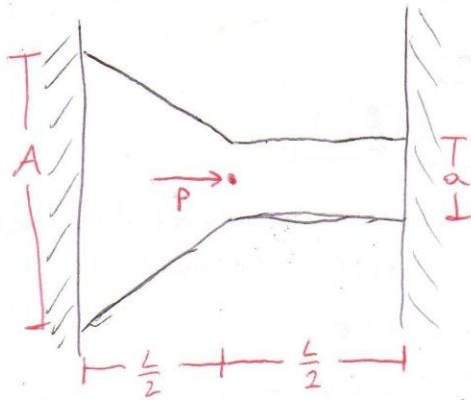
* El alargamiento para cada barra es:

$$\bullet \text{ Barra (c): } L_F = \left(\frac{F_{cc}}{AE} + 1 \right) l \Rightarrow \Delta L_c = (L_F - l) = \frac{F_{cc}}{AE} = \frac{\left(\frac{lF}{AE} + 2(L - l) \right) l}{L + 2l}$$

$$\bullet \text{ Barra (d), e (i): } L_F = \left(\frac{F_{cd, (i)}}{AE} + 1 \right) L \Rightarrow \Delta L_{d, i} = (L_F - L) = \frac{F_{cd, (i)}}{AE}$$

$$\Delta L_{d, i} = \frac{\left(\frac{lF}{AE} + (L - L) \right) L}{L + 2L}$$

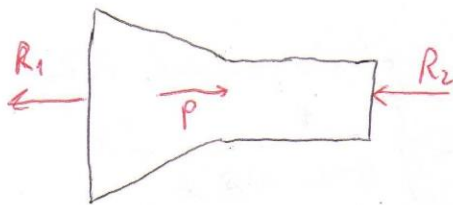
P3)



Espesor e
Módulo de Elasticidad E

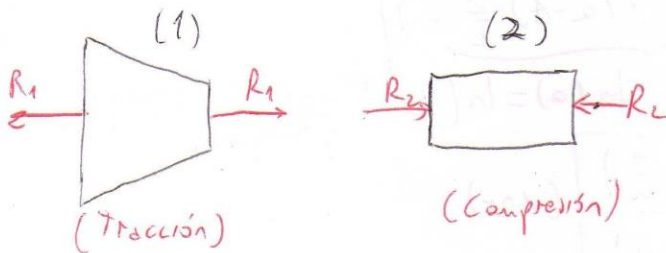
Principal problema: Área en el primer tramo varía con la distancia
 $\Rightarrow$ Esfuerzo varía con la distancia.

• DCL completo



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \boxed{P = R_1 + R_2} \quad (i)$$

• Cortes antes y después de P:



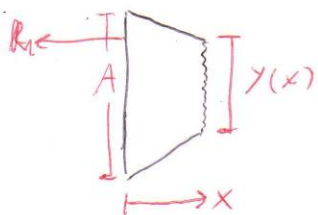
Como el largo total no cambia, lo que se alarga (1), se acorta (2)

$$\Rightarrow \boxed{\Delta L_1 = \Delta L_2} \quad (ii)$$

• Aplicación de Ley de Hooke:

$$(2): \sigma = \frac{R_2}{a \cdot e} \Rightarrow \frac{R_2}{a \cdot e} = E \cdot \frac{\Delta L_2}{L/2} \Rightarrow \boxed{\Delta L_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_2 L}{a \cdot e E}} \quad (iii)$$

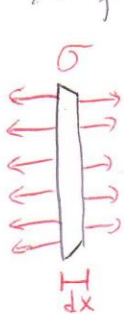
(17);



$$\sigma = \frac{R_1}{e \cdot \gamma(x)} \quad \text{y} \quad \gamma(x) = A + (a - A) \cdot \frac{2}{L} x$$

$$\sigma(x) = \frac{R_1}{e(A + (a - A) \frac{2}{L} x)}$$

* Cada segmento diferencial del tramo (1) se deforma en magnitudes diferentes ya que el esfuerzo cambia con x . Al hacer un corte diferencial:



$$\epsilon = \frac{\Delta L(dx)}{dx}$$

↗ Lo que se alarga cada trozo diferencial
 ↘ Longitud del trozo diferencial

Ley de Hooke

$$\sigma = E \cdot \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$$\frac{\Delta L(dx)}{dx} = \frac{\sigma(x)}{E}$$

$$\Delta L(dx) = \frac{\sigma(x)}{E} dx$$

~~***~~

* Integrando entre $\frac{L}{2}$ y $\frac{L}{2}$, se obtiene el alargamiento total:

$$\int \Delta L(dx) = \Delta L_1 = \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{\sigma(x)}{E} dx = \frac{R_1}{e E} \int_0^{\frac{L}{2}} \frac{1}{A + (a - A) \frac{2}{L} x} dx$$

$$\Rightarrow \Delta L_1 = \frac{R_1}{e E} \cdot \frac{L}{2(a - A)} \cdot \ln \left(A + (a - A) \cdot \frac{2}{L} x \right) \Big|_0^{\frac{L}{2}}$$

$\ln(A) - \ln(a) = \ln\left(\frac{A}{a}\right)$

$$\therefore \Delta L_1 = \frac{R_1 L \cdot \ln\left(\frac{A}{a}\right)}{2 e E (a - A)} \quad (iv)$$

* Debido a (iv) $\Rightarrow$ (iii) = (iv):

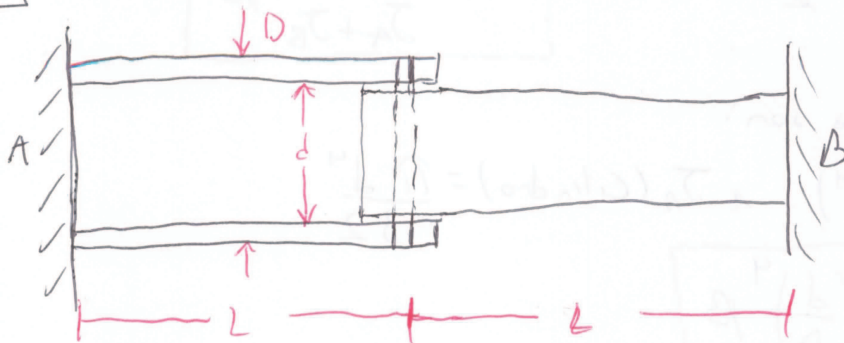
$$\frac{1}{2} \frac{R_2 K}{a e E} = \frac{R_1 K \cdot \ln\left(\frac{A}{a}\right)}{2 e E (a - A)} \Rightarrow R_2 = \frac{a}{a - A} \ln\left(\frac{A}{a}\right) R_1 \quad (v)$$

* Reemplazando (v) en (i), se tiene finalmente que:

$$R_1 \left(1 + \frac{2}{a-4} \ln\left(\frac{A}{a}\right) \right) = P$$

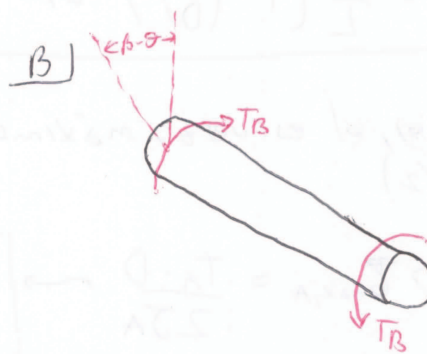
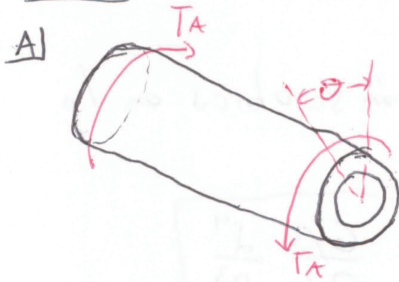
$$\therefore R_1 = \frac{P}{1 + \frac{2}{a-4} \ln\left(\frac{A}{a}\right)}$$
$$R_2 = \frac{P}{1 + \frac{1}{\frac{2}{a-4} \ln\left(\frac{A}{a}\right)}}$$

P11

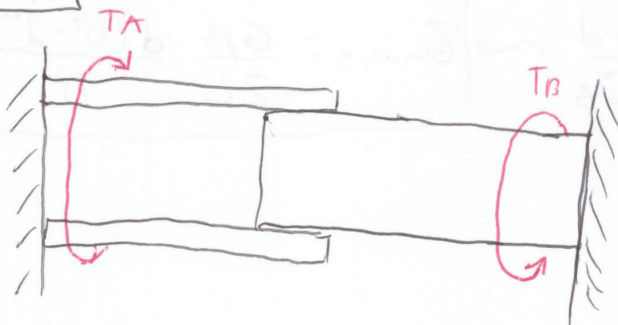


* La barra B se debe torcer un ángulo β para que los agujeros coincidan. Al saltar la barra β , ésta se desenvuelve cierto ángulo θ , mientras que la barra A se torce el mismo ángulo θ :

DCL



Completo



$$T_A = T_B$$

* Calculando las torsiones:

$$\rightarrow T_A = \frac{G \cdot J_A}{L} \theta_A = \frac{G \cdot J_A}{L} \theta \quad \wedge \quad T_B = \frac{G \cdot J_B}{L} \theta_B = \frac{G \cdot J_B}{L} (\beta - \theta)$$

* Como $T_A = T_B$; calculamos θ :

$$\frac{G J_A}{L} \theta = \frac{G J_B}{L} \beta - \frac{G J_B}{L} \theta \Rightarrow \theta = \frac{J_B}{J_A + J_B} \beta$$

* Los momentos polares de inercia son:

$$J_A (\text{Tubo}) = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \quad \text{y} \quad J_B (\text{Cilindro}) = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$\therefore \theta = \left(\frac{d}{D} \right)^4 \beta$$

* Reemplazando en las torsiones:

$$T_A = \frac{G}{L} \left(\frac{d}{D} \right)^4 J_A \beta$$

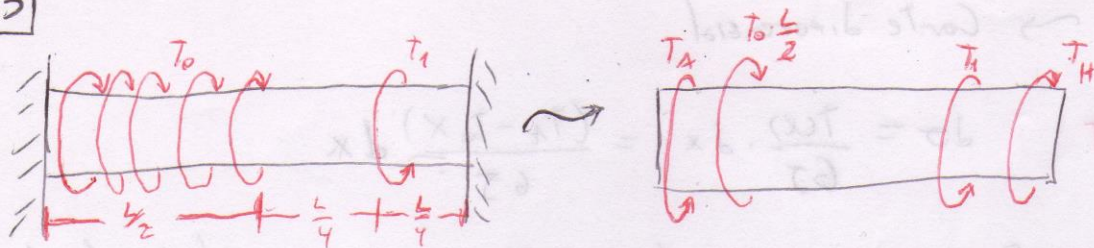
$$T_B = \frac{G}{L} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right) J_B \beta$$

* En cilindros y tubos, el esfuerzo máximo de torsión se ubica en la superficie ($r = D/2$)

$$\tau = \frac{T r}{J} \Rightarrow \tau_{\max, A} = \frac{T_A \cdot D}{2 J_A} \leadsto \tau_{\max, A} = \frac{G \beta}{2 L} \frac{d^4}{D^3}$$

$$\Rightarrow \tau_{\max, B} = \frac{T_B \cdot d}{2 J_B} \leadsto \tau_{\max, B} = \frac{G \beta}{2 L} \frac{d (D^4 - d^4)}{D^4}$$

P3)



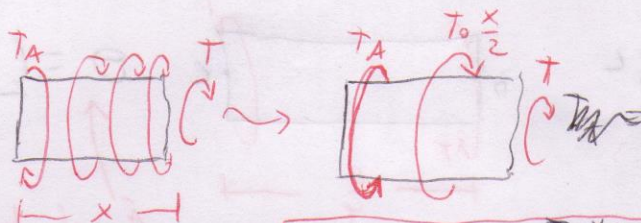
$$\text{DCL} \leadsto T_A - T_0 \frac{L}{2} + T_1 - T_H = 0 \quad (*)$$

* Cada uno de los segmentos se deforma en ángulos diferentes.

↳ Es necesario calcular estos ángulos y relacionarlos

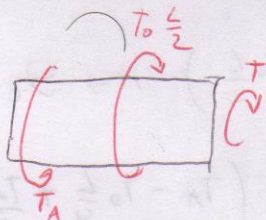
* Determinemos los torques que actúan en cada segmento y luego los ángulos de torsión:

• Corte $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$



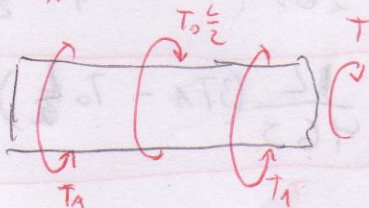
$$T(x) = T_A - T_0 \frac{x}{2}$$

• Corte $\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{3L}{4}$



$$T(x) = T_A - T_0 \frac{L}{2}$$

• Corte $\frac{3L}{4} \leq x \leq L$



$$T(x) = T_A + T_1 - T_0 \frac{L}{2}$$

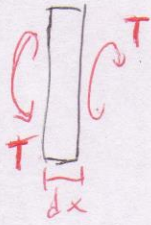
(Por (*))

$$T(x) = T_A$$

* Ángulos de torsión:

$$T = \frac{GJ\theta}{L} \leadsto \theta = \frac{TL}{GJ} \leadsto d\theta = \frac{T}{GJ} dx$$

• $0 < x < \frac{L}{2} \rightarrow$ Corte diferencial



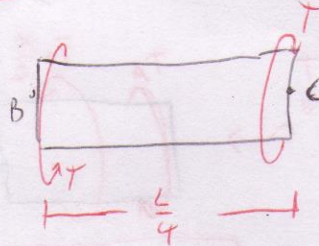
$$d\theta = \frac{T(x)}{GJ} \cdot dx = \frac{(T_A - T_0 x)}{GJ} dx$$

• Si integramos hasta el punto B, obtendremos el ángulo de torsión en el punto B

$$\rightarrow \int d\theta = \theta_B = \frac{1}{GJ} \int_0^{\frac{L}{2}} (T_A - T_0 x) dx = \frac{1}{GJ} \left(T_A \cdot \frac{L}{2} - T_0 \frac{(\frac{L}{2})^2}{2} \right)$$

$$\therefore \theta_B = \frac{L}{2GJ} \left(T_A - T_0 \frac{L}{4} \right)$$

• $\frac{L}{2} < x < \frac{3}{4}L$



$$\theta = \frac{(T_A - T_0 \cdot \frac{L}{2}) \cdot \frac{L}{4}}{GJ}$$

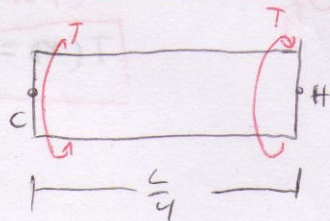
Ángulo de torsión relativo entre B, C

$$\rightarrow \theta_{BC} = \frac{L}{4GJ} (T_A - T_0 \frac{L}{2}) \rightarrow \theta_C = \theta_B + \theta_{BC}$$

$$\therefore \theta_C = \frac{L}{2GJ} \left(T_A - T_0 \frac{L}{4} + \frac{T_A}{2} - T_0 \frac{L}{4} \right)$$

$$\theta_C = \frac{L}{4GJ} (3T_A - T_0 \frac{L}{2})$$

• $\frac{3}{4}L < x < L$



$$\theta_{CH} = \frac{(T_A + T_1 - T_0 \frac{L}{2}) \cdot \frac{L}{4}}{GJ}$$

$$\rightarrow \theta_{CH} = \frac{L}{4GJ} (T_A + T_1 - T_0 \frac{L}{2}) \rightarrow \theta_H = \theta_C + \theta_{CH}$$

$$\rightarrow \mathcal{Q}_H = \frac{8L}{465} (3T_A - T_0 \frac{L}{2}) + \frac{L}{465} (T_A + T_1 - T_0 \frac{L}{2})$$

$$= \frac{L}{465} (3T_A - T_0 \frac{L}{2} + T_A + T_1 - T_0 \frac{L}{2})$$

$$\therefore \mathcal{Q}_H = \frac{L}{465} (4T_A - 3T_0 \frac{L}{2} + T_1)$$

* Pero como ~~H~~ es un punto empotrado $\rightarrow \mathcal{Q}_H = 0$

$$\Rightarrow 4T_A - 3T_0 \frac{L}{2} + T_1 = 0$$

$$\therefore T_A = 3T_0 \frac{L}{8} - \frac{T_1}{4}$$

* Reemplazando en (*)

$$T_H = T_A - T_0 \frac{L}{2} + T_1 = 3T_0 \frac{L}{8} - \frac{T_1}{4} - T_0 \frac{L}{2} + T_1$$

$$\therefore T_H = -\frac{1}{8} T_0 L + \frac{3}{4} T_1$$