Control 2, Mecánica de Solidos ME3204
2do semestre 2014

Profesor: R. Bustamante

1. (23 puntos) Para la viga doblada mostrada en la Figura 1, que está empotrada en A, en donde EI es un dato conocido, determine la deflexión horizontal del punto D y la pendiente en el mismo punto.

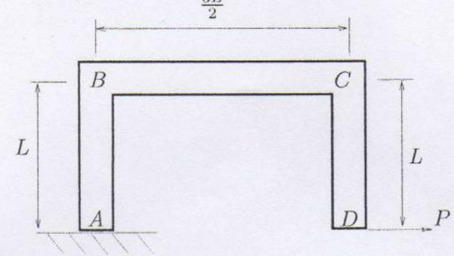


Figura 1: Viga doblada.

2. En la Figura 2 se muestra un motor que entrega 75HP de potencia a una velocidad de 1000rpm. Mediante conexiones de engranaje, a dos ejes de transmisión, la potencia se transfiere a un par de poleas extremas, de las cuales la polea D consume 40HP. En el punto A, la reducción de los engranajes es desde $N_1 = 200$ a $N_2 = 100$ (N= número de dientes del engranaje) siendo el diámetro del engranaje menor de 20cm. Las dimensiones de las poleas y engranajes restantes son: r_1=10cm, r_2 = 15cm, D_1 = 10cm, D_2 = 35cm y la relación de tensiones en ambas poleas es $t_1/t_2 = 2{,}5$.

   a) (17 puntos) Calcular el torque en los tres ejes que se distinguen (AB y si DBC se divide en dos partes, es decir un eje pero con dos diámetros en dos partes DB y BC, respectivamente).

   b) (8 puntos) Calcular todas las tensiones en las poleas C y D y las fuerzas tangenciales en los engranajes A y B.

   c) (14 puntos) Dibujar el diagráma de momento $M(X)$ para los tres ejes.

   d) (10 puntos) Indique para cada eje cual es la zona (indicando uno o dos puntos) en el eje que estaría más solicitado. Justifique en detalle el porqué.

   e) (14 puntos) Para los puntos mencionados anteriormente, determine los estados de esfuerzos.

   f) (11 puntos) Considerando los estados de esfuezos calculados anteriormente, calcular el diámetro mínimo para cada eje usando el criterio de falla de Von Mises. Emplee $FS = 2$ y suponga ejes hechos de acero con $\sigma_o = 4500\text{Kgf/cm}^2$.

   Datos adicionales: d diámetro engranaje $d = Np$, donde N es el numero de dientes y p es el espesor 'medio' de cada diente[1]. Los soportes son tipo rodamiento y por simplicidad asuma

[1]Es necesario hacer notar que si dos engranajes interactúan, entonces p debe ser igual para ambos.

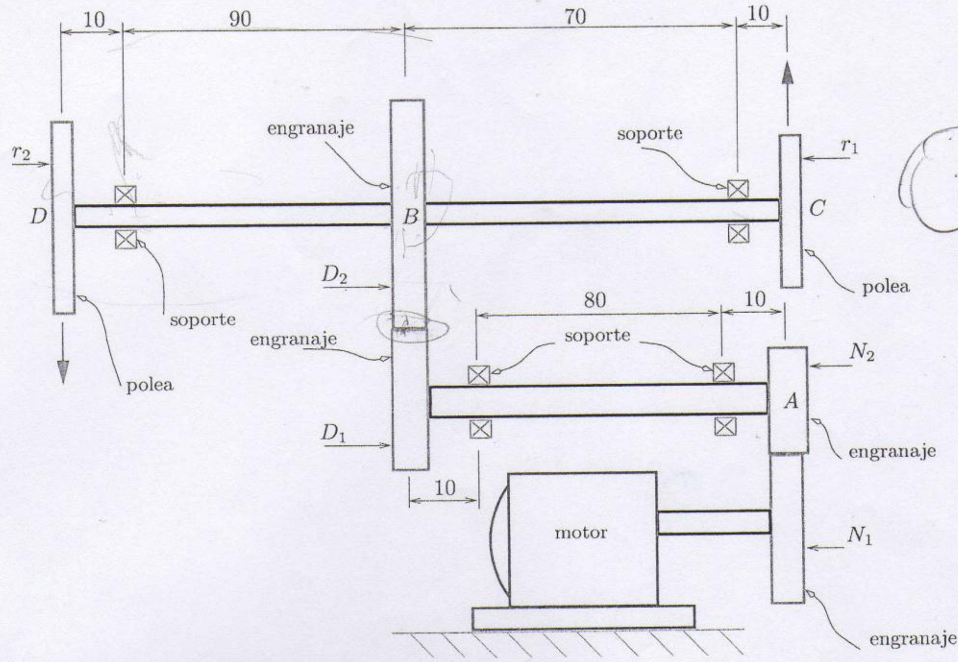


Figura 2: Motor, ejes, engranajes y poleas.

que solo generan fuerzas de reacción pero no momentos flexionantes. Todas las dimensiones en la figura estan en cm.

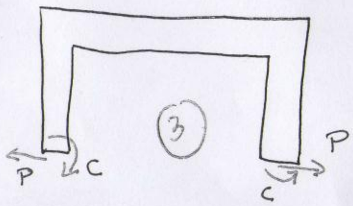
Formulario:

- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$, $J = \frac{\pi D^4}{32}$, $\tau = \frac{Tr}{J}$
- Flexión: $\sigma_x = -\frac{M(x)y}{I_z}$, Eje neutro $\bar{y} = \frac{\int_A y' \,\mathrm{d}A}{A}$, Momento de inercia $I_z = \int_A y^2 \,\mathrm{d}A$
- Propiedades de área: Eje sección cuadrada $I_z = \frac{ab^3}{12}$, a base, b

  Eje sección circular $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$, d diámetro. Semicírculo $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$, $I_z = 0{,}1098 r^4$ (respecto a eje neutro), r radio. Cuarto de cículo $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$, $I_z = \frac{\pi r^4}{16}$. Triángulo rectángulo $\bar{y} = \frac{b}{3}$, $I_z = \frac{ab^3}{36}$, a base, b altura.
- Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A$
- Deflexión: $\frac{d^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} = -\frac{w(x)}{EI_z}$, $\frac{d^3\hat{y}}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{V(x)}{EI_z}$, $\frac{d^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta(x)$, $\int \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = r(x-a)$, $\int r(x-a)\mathrm{d}x = (x-a)r(x-a)$, $\int (x-a)r(x-a)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)$, $\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a)$
- Corte en vigas: Sección rectangular$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$, Sección arbitraria $\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t}\int_y^c \xi \,\mathrm{d}A$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA}\,\mathrm{d}x$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI}\,\mathrm{d}x$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,\mathrm{d}x$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V(x)^2}{GA}\,\mathrm{d}x$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$.
- Unidades: 1kgf=2.2046lbf; 1psi=1lbf/in^2; 1in=1pulgada; 1HP=745.69W; 1rpm=$2\pi/60$ rad/s; 1Kgf=9.8N

Pauta Control 2

(1) $U = \int_0^{Largo} \frac{M^2}{2EI}\,dx$ solo flexión (2)

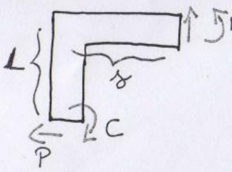


(C=0 al final del cálculo)

A → B

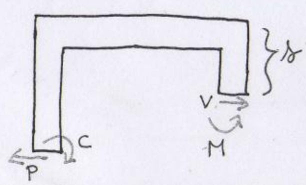
$\Rightarrow M(s) = sP + C$ (1)

B → C



$\Rightarrow M(s) = LP + C$ (1)

C → D



$\Rightarrow M(s) = P(L-s) + C$ (1)

$$U = \int_A^B \frac{M^2}{2EI}\,ds + \int_B^C \frac{M^2}{2EI}\,ds + \int_C^D \frac{M^2}{2EI}\,ds \quad (2)$$

$$\Rightarrow \delta_D = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M(s)}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,ds + \int_0^{3L/2} \frac{M(s)}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,ds + \int_0^L \frac{M(s)}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}\,ds \quad (2)$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ \int_0^L (sP+C)s\,ds + \int_0^{3L/2}(LP+C)L\,ds + \int_0^L [P(L-s)+C](L-s)\,ds \right\}$$

constante

$$= \frac{1}{EI}\left[L^2C + \frac{2}{3}L^3P + \frac{3}{2}L^2(C+LP)\right] \quad (3)$$

$C=0$

$$\Rightarrow \delta_D = \frac{13}{6EI}L^3P \quad (2)$$

3]

$$\theta_D = \frac{\partial U}{\partial C} = \int_0^L \frac{M(y)}{EI}\frac{\partial M}{\partial C}\,dy + \int_0^{3L/2} \frac{M(y)}{EI}\frac{\partial M}{\partial C}\,dy + \int_0^L \frac{M(y)}{EI}\frac{\partial M}{\partial C}\,dy \qquad 1$$

$$= \frac{1}{EI}\left\{ \int_0^L (yP + C)\,dy + \int_0^{3L/2} (LP + C)\,dy + \int_0^L [P(L-y)+C]\,dy \right\}$$

$$= \frac{1}{EI}\left[2CL + L^2P + \frac{3L}{2}(C + LP)\right] \qquad 3$$

$$C = 0$$

$$\Rightarrow \theta_D = \frac{5}{2EI}L^2P \qquad 2$$

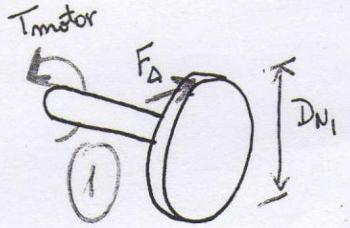
2 a Pot_{motor} $\quad Pot_D \quad Pot_C$

$$Pot_{motor} = Pot_D + Pot_C \Rightarrow Pot_C = Pot_{motor} - Pot_D \quad 1$$

$$= 75 - 40 = 35 \text{ HP}$$

$$Pot_{motor} = \omega_{motor} T_{motor}$$

$$\Rightarrow T_{motor} = \frac{Pot_{motor}}{\omega_{motor}} = 534.061 \text{ Nm} \quad 1$$



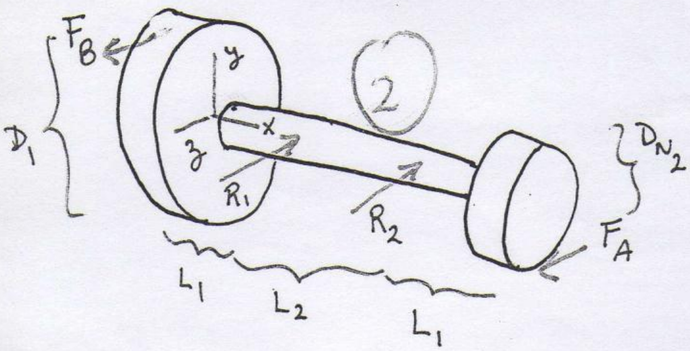
$$p N_2 = D_{N_2} \Rightarrow p = \frac{D_{N_2}}{N_2}$$

$$p N_1 = D_{N_1}$$

$$\Rightarrow D_{N_1} = D_{N_2} \frac{N_1}{N_2} = 40 \text{ cm} = 0.4 \text{ m} \quad 1$$

$$F_A \frac{D_{N_1}}{2} = T_{motor}$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{2 T_{motor}}{D_{N_1}} = 2670.31 \text{ N} \quad 1$$



T_{AB} ?

$$T_{AB} = F_A \frac{D_{N_2}}{2}$$

$$= \frac{2 T_{motor}}{D_{N_1}} \frac{D_{N_2}}{2}$$

$$= T_{motor} \frac{D_{N_2}}{D_{N_1}}$$

$$= T_{motor} \frac{N_2}{\ }$$

$$T_{AB} = T_{motor}\frac{N_2}{N_1} = 267.031 \text{ Nm}$$ 2

$$F_B\frac{D_1}{2} = F_A\frac{D_{N_2}}{2} \Rightarrow F_B = F_A\frac{D_{N_2}}{D_1} = 5340.61 \text{ N}$$ 1

Equilibrio eje A-B

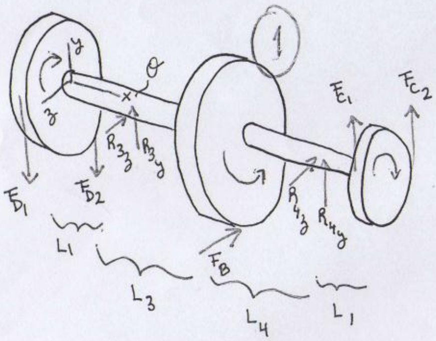
$$\sum_Q M_y = 0 \Leftrightarrow R_2 L_2 + F_B L_1 = F_A(L_1+L_2)$$

↗ aplicación R_1

$$\Rightarrow R_2 = \frac{F_A}{L_2}(L_1+L_2) - F_B\frac{L_1}{L_2} = 2336.52 \text{ N}$$ 1

$$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow R_1 + R_2 = F_4 + F_B$$

$$\Rightarrow R_1 = F_A + F_B - R_2 = 5674.4 \text{ N}$$ 1



$$\omega_{motor} D_{N_1} = \omega_{AB} D_{N_2} \Rightarrow \omega_{AB} = \omega_{motor}\frac{D_{N_1}}{D_{N_2}} = \omega_{motor}\frac{N_1}{N_2}$$

$$= 209.44 \left[\frac{rad}{s}\right]$$ 1

$$\omega_{DBC} D_2 = \omega_{AB} D_1 \Rightarrow \omega_{DBC} = \omega_{AB}\frac{D_1}{D_2}$$

$$\Rightarrow \omega_{DBC} = \omega_{motor}\frac{N_1}{N_2}\frac{D_1}{D_2} = 59.8399\left[\frac{rad}{s}\right]$$ 1

Torque en C $\quad T_C\,\omega_{DBC} = Pot_C$

$$\Rightarrow T_C = \frac{Pot_C}{\omega_{DBC}} = \frac{Pot_C}{\omega_{motor}}\frac{N_2 D_2}{N_1 D_1}$$

entre B y C ↗

$$= 436.15 \text{ Nm}$$ 1

Torque en D $\quad T_D\,\omega_{DBC} = Pot_D$

$$\Rightarrow T_D = \frac{Pot_D}{\omega_{motor}}\frac{N_2 D_2}{N_1 D_1} = 498.457 \text{ Nm}$$ 1

(b) $\frac{F_{C1}}{F_{C2}} = 2.5 \Rightarrow F_{C1} = 2.5 F_{C2}$

$$T_C = (F_{C1} - F_{C2})\,r_1 = 1.5 F_{C2} r_1$$

$$\Rightarrow F_{C2} = \frac{T_C}{1.5 r_1} = 2907.67 \text{ N}$$ 1

$$\Rightarrow F_{C1} = 7269.17 \text{ N}$$ 1

$\frac{F_{D2}}{F_{D1}} = 2.5 \Rightarrow F_{D2} = 2.5 F_{D1}$

$$T_D = (F_{D2} - F_{D1})\,r_2 = 1.5 F_{D1} r_2$$

$$\Rightarrow F_{D1} = \frac{T_D}{1.5 r_2} = 2215.36 \text{ N}$$ 1

$$\Rightarrow F_{D2} = 5538.41 \text{ N}$$ 1

$$\sum_{0} M_z = 0 \quad R_{4y}(L_3+L_4) + (F_{C1}+F_{C2})(L_3+L_4+L_1) + (F_{D1}+F_{D2})L_1 = 0$$

$$\Rightarrow R_{4y} = -\frac{[(F_{C1}+F_{C2})(L_3+L_4+L_1)+(F_{D1}+F_{D2})L_1]}{(L_3+L_4)}$$

$$= -11297.5 \text{ N} \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_{3y} + R_{4y} + F_{C1} + F_{C2} = F_{D1} + F_{D2}$$

$$\Rightarrow R_{3y} = F_{D1} + F_{D2} - F_{C1} - F_{C2} - R_{4y}$$

$$= 8874.44 \text{ N} \quad (1)$$

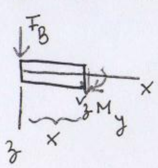
$$\sum_{0} M_y = 0 \quad R_{4z}(L_3+L_4) + F_B L_3 = 0$$

$$\Rightarrow R_{4z} = \frac{-F_B L_3}{(L_3+L_4)} = -3004.09 \text{ N} \quad (1)$$

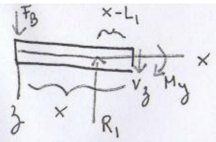
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow R_{3z} + R_{4z} + F_B = 0$$

$$\Rightarrow R_{3z} = -R_{4z} - F_B = -2336.52 \text{ N} \quad (1)$$

(c) eje AB $\quad 0<x<L_1$



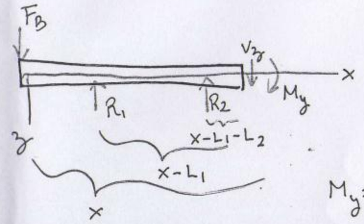
$V_z = -F_B \qquad M_y = F_B x \quad (1)$



$V_z = R_1 - F_B = 333.788$

$M_y = F_B x - R_1(x-L_1) \quad (1)$

$L_1 < x < L_1 + L_2$



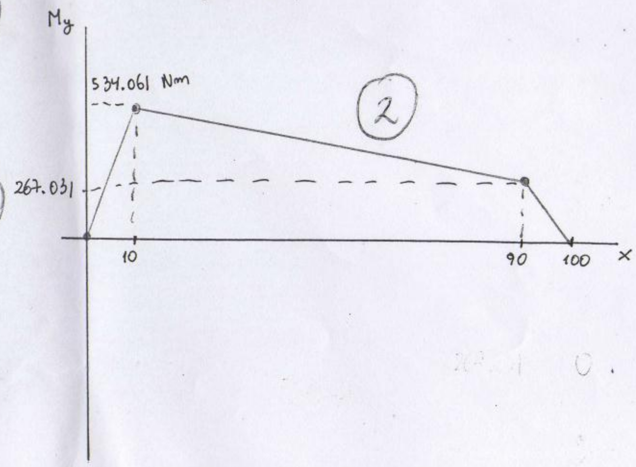
$V_z = R_1 + R_2 - F_B$

$= F_A$

$M_y = F_B x - R_1(x-L_1) - R_2(x-L_1-L_2) \quad (1)$

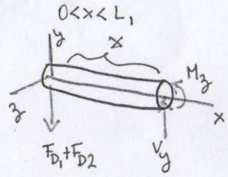
$L_1 + L_2 < x < 2L_1 + L_2$

gráfico de $M_y(x)$ para eje AB



J) eje DBC

$0 < x < L_1$



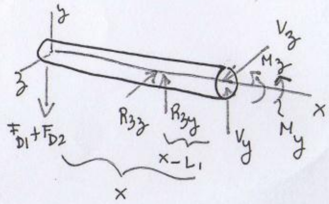
$\Rightarrow V_y = F_{D1}+F_{D2} = 7753.78\ N$

$M_z = -(F_{D1}+F_{D2})x$ (1)

$V_z = 0$

$M_y = 0$

$L_1 < x < L_1+L_3$



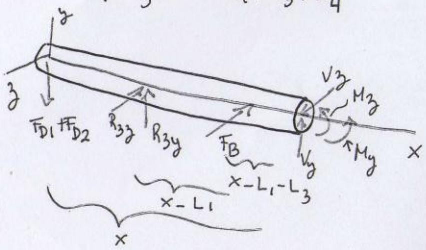
$V_y = F_{D1}+F_{D2}-R_{3y} = -1120.66\ N$

$M_z = -(F_{D1}+F_{D2})x + R_{3y}(x-L_1)$ (1)

$V_z = R_{3z}$

$M_y = R_{3z}(x-L_1)$

$L_1+L_3 < x < L_1+L_3+L_4$



(1)

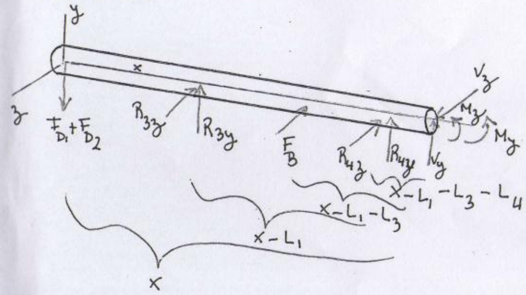
$V_y = F_{D1}+F_{D2}-R_{3y} = -1120.66\ N$

$M_z = -(F_{D1}+F_{D2})x + R_{3y}(x-L_1)$

$V_z = R_{3z}+F_B = 3004.09\ N$

$M_y = R_{3z}(x-L_1)+F_B(x-L_1-L_3)$ (1)

$L_1+L_3+L_4 < x < L_1+L_3+L_4+L_1$



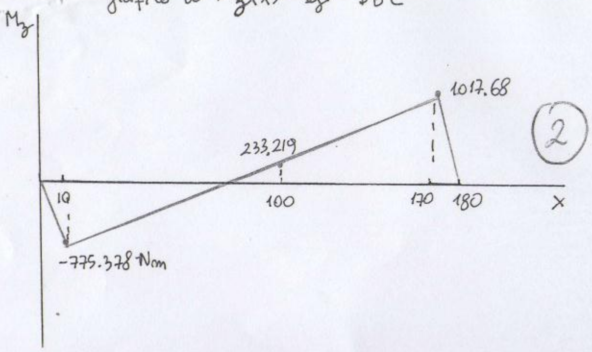
$V_y = F_{D1}+F_{D2}-R_{3y}-R_{4z} = F_{C1}+F_{C2} = 10176.8\ N$

$M_z = -(F_{D1}+F_{D2})x + R_{3y}(x-L_1) + R_{4y}(x-L_1-L_3-L_4)$

$V_z = R_{3z}+F_B+R_{4z} = 0$

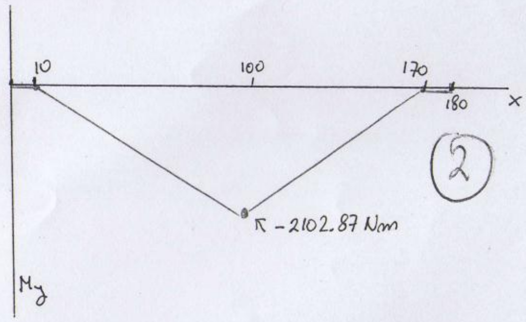
$M_y = R_{3z}(x-L_1)+F_B(x-L_1-L_3)+R_{4z}(x-L_1-L_3-L_4) = 0$ (1)

1) gráfico de $M_z(x)$ eje DBC



2

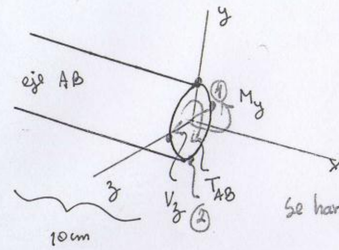
gráfico de $M_y(x)$ eje DBC



2

d) En el eje AB el punto con mayor M_y → esfuerzo de flexión es $x = 10$ cm desde B → como flexión en general causa esfuerzos mucho mayores que el corte puro se escoge ese punto (poco antes de R_1 desde B).

2



$M_{y_{max}} = 534.061$ Nm

$T_{AB} = 267.031$ Nm

$V_z = 5340.61$ N

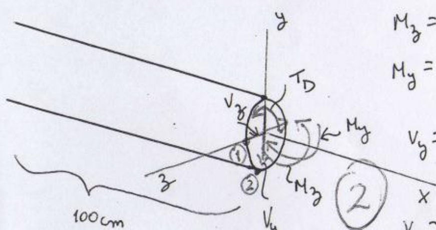
2

Se hará el análisis en 1

En el eje DBC M_z y M_y no tienen los máximos en los mismos puntos ($T_C = 436.15$ Nm ; $T_D = 498.457$ Nm)
Escogamos dos puntos, $x = 100$ (antes de llegar a B) y $x = 170$ antes de llegar a $\vec{R_4}$.

2

$x = 100$ cm



2

$M_z = 233.219$ Nm

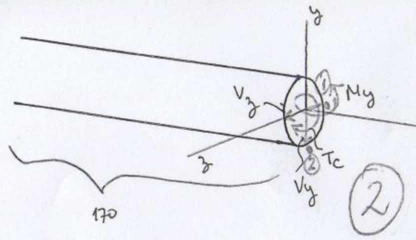
$M_y = 2102.87$ Nm (negativo)

$V_y = 1120.66$ N (negativo)

$V_z = 2336.52$ N (negativo)

$T_D = 498.457$ Nm

3)



$T_C = 436.15$ Nm

$M_y = 1017.68$ Nm

$V_y = 1120.66$ N (negativo)

$V_z = 3004.09$ N

2

e) Eje AB

• Punto ① → $\sigma_x = - \dfrac{M_y \, d_{AB}/2}{I_{AB}}$ $\quad I_{AB} = \dfrac{\pi d_{AB}^4}{64}$

$= - M_y \dfrac{32}{\pi d_{AB}^3}$ 1

→ $\tau_{xy} = - \dfrac{T_C \, d_{AB}/2}{J_{AB}}$ $\quad J_{AB} = \dfrac{\pi d_{AB}^4}{32}$

$= - T_C \dfrac{16}{\pi d_{AB}^3}$ 1

→ No hay corte por corte puro por V_z 1

• Punto ② En ese punto no hay σ_x por flexión, solo corte por T_C y por V_z, como la contribución por V_z es mucho menor que por M_y no se analizará este punto 1

• Eje DBC, parte DB

• Punto ① → $\sigma_x = - M_y \dfrac{32}{\pi d_{DB}^3}$ 1

→ $\tau_{xy} = - T_D \dfrac{16}{\pi d_{DB}^3}$ 1

→ $\tau_{xy} = - \dfrac{V_y}{I_{DB}\, t} \int_z^c z \, dA = \dfrac{-V_y}{\frac{\pi d_{DB}^4}{64} d_{DB}} \dfrac{2}{3} \dfrac{d_{DB}^3}{8}$

$= - \dfrac{16}{3\pi} \dfrac{V_y}{d_{DB}^2}$ 1

• Punto ② → $\sigma_x = M_z \dfrac{32}{\pi d_{DB}^3}$ 1

→ $\tau_{xz} = - T_D \dfrac{16}{\pi d_{DB}^3}$ 1

→ $\tau_{xz} = - \dfrac{16}{3\pi} \dfrac{V_z}{d_{DB}^2}$ 1

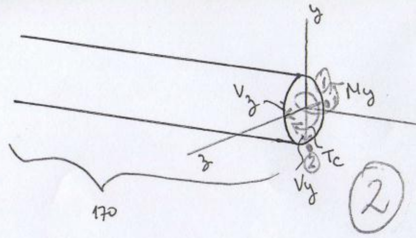
• Eje DBC, parte BC

• Punto ① → $\sigma_x = - M_y \dfrac{32}{\pi d_{BC}^3}$ 1

→ $\tau_{xy} = - T_C \dfrac{16}{\pi d_{BC}^3}$ 1

→ $\tau_{xy} = - \dfrac{16}{3\pi} \dfrac{V_y}{d_{BC}^2}$ 1

3)



$T_C = 436.15$ Nm

$M_y = 1017.68$ Nm

$V_y = 1120.66$ N (negativo)

$V_z = 3004.09$ N

(2)

(e) Eje AB

• Punto (1) + $\sigma_x = -\dfrac{M_y\, d_{AB}/2}{I_{AB}}$ $\quad I_{AB} = \dfrac{\pi d_{AB}^4}{64}$

$= -M_y \dfrac{32}{\pi d_{AB}^3}$ (1)

+ $\tau_{xy} = -\dfrac{T_c\, d_{AB}/2}{J_{AB}}$ $\quad J_{AB} = \dfrac{\pi d_{AB}^4}{32}$

$= -T_c \dfrac{16}{\pi d_{AB}^3}$ (1)

+ No hay corte por corte puro por V_z (1)

• Punto (2) En ese punto no hay σ_x por flexión, solo corte por T_c y por V_z, como la contribución por V_z es mucho menor que por M_y no se analizará este punto (1)

• Eje DBC, parte DB

• Punto (1) + $\sigma_x = -M_y \dfrac{32}{\pi d_{DB}^3}$ (1)

+ $\tau_{xy} = -T_D \dfrac{16}{\pi d_{DB}^3}$ (1)

+ $\tau_{xy} = -\dfrac{V_y}{I_{DB}\, t} \int_z^c \xi \, dA = \dfrac{-V_y}{\frac{\pi d_{DB}^4}{\cancel{64}\,16} d_{DB}} \dfrac{\cancel{2}}{3} \dfrac{d_{DB}^3}{\cancel{8}\,4}$

$= -\dfrac{16}{3\pi} \dfrac{V_y}{d_{DB}^2}$ (1)

• Punto (2) + $\sigma_x = M_z \dfrac{32}{\pi d_{DB}^3}$ (1)

+ $\tau_{xz} = -T_D \dfrac{16}{\pi d_{DB}^3}$ (1)

+ $\tau_{xz} = -\dfrac{16}{3\pi} \dfrac{V_z}{d_{DB}^2}$ (1)

• Eje DBC, parte BC

• Punto (1) + $\sigma_x = -M_y \dfrac{32}{\pi d_{BC}^3}$ (1)

+ $\tau_{xy} = -T_c \dfrac{16}{\pi d_{BC}^3}$ (1)

+ $\tau_{xy} = -\dfrac{16}{3\pi} \dfrac{V_y}{d_{BC}^2}$ (1)