Control 3, Mecánica de Solidos ME3204
2do semestre 2014

Profesor: R. Bustamante

1. (24 puntos) En la Figura 1 se tiene una representacion de un mecanismo muy simple en donde se tiene una barra doblada DAC interactuando con una barra AB de sección rectangular con lados d y e y una rueda de radio R.

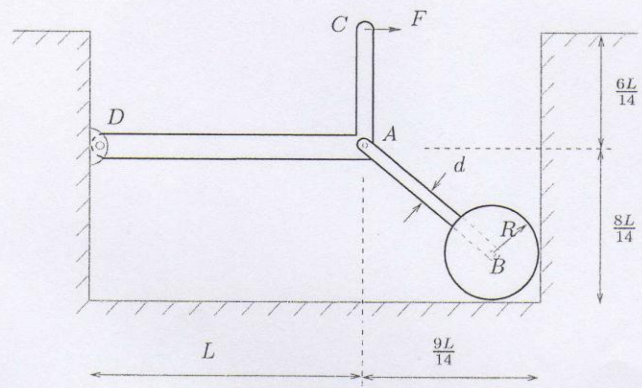


Figura 1: Mecanismo.

Si no se considera roce, determine la máxima fuerza F que se puede aplicar en C sin que la barra AB falle. Use $e = d/5$. La barra AB esta conectada por medio de pasadores en A y B. Datos: $E = 190$MPa, $L = 1$m, $d = 2$cm, $R = 20$cm.

2. (25 puntos) En la Figura 2 se tiene una vista lateral y frontal de un tubo de sección circular, de radios interior a y exterior b. En la misma figura se puede ver un sistema de coordenadas

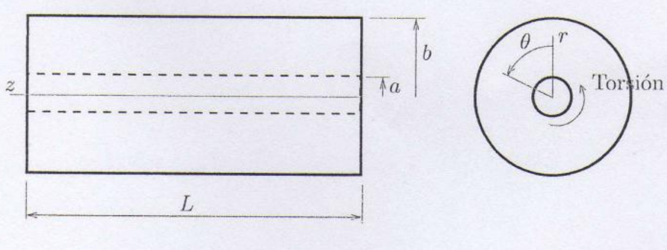


Figura 2: Tubo.

cilíndricas r, θ, z. Considerémos que en $r = b$ no hay desplazamiento (es decir en esa superficie el tubo está pegado a una superficie exterior rígida), y que en $r = a$ la pared interior sufre una rotación en θ conocida v_o.

Suponiendo una forma simplificada para las componentes del campo de desplazamientos en coordenadas cilíndricas u_r, u_θ, u_z, resuelva el problema de valor de frontera asociado a estas condiciones de borde[1].

3. Considére las siguientes preguntas:

   a) (9 puntos) Sea $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 100 & 75 & 80 \\ 75 & 56 & 150 \\ 80 & 150 & 120 \end{pmatrix}$ [MPa] en un punto P de un cuerpo, con $E =$ 210GPa y $\nu = 0{,}25$:

      - Determine el tensor de deformación en ese punto.
      - Determine los esfuerzos principales y de corte máximo.

   b) (11 puntos) En la Figura 3 se tiene un bloque bajo el efecto de una fuerza f uniforme, que actúa en una zona de largo a (centrada en la cara del bloque). El bloque está en contacto

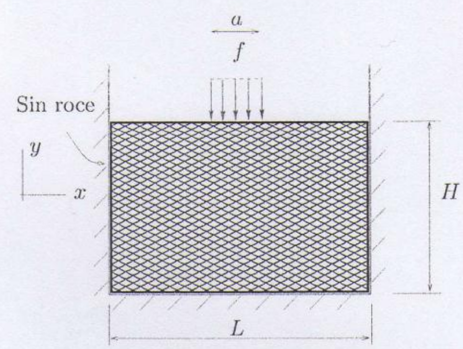


Figura 3: Bloque.

con una pared y un piso y puede deslizar en esa pared y piso sin roce. La longitud en la dirección z es M con $M \gg L$, $M \gg H$. Indique en detalle las condiciones de borde para el problema de valor de frontera en elasticidad lineal para este caso. Considére todas las simetrías posibles para este problema. ¿Qué tipo de problema plano es este?

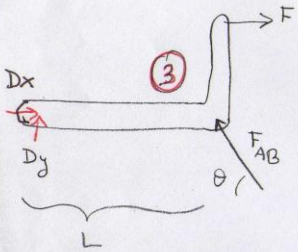
[1] Para simplificar suponga que el tubo no se alarga ni acorta en la dirección z, y que en el sentido radial la superficie interior tampoco sufre cambio de radio.

Formulario:

- Torsión: $T=\frac{\theta GJ}{L}$, $J=\frac{\pi D^4}{32}$, $\tau=\frac{Tr}{J}$
- Flexión: $\sigma_x=-\frac{M(x)y}{I_z}$, Eje neutro $\bar{y}=\frac{\int_A y'\,\mathrm{d}A}{A}$, Momento de inercia $I_z=\int_A y^2\,\mathrm{d}A$
- Propiedades de área: Eje sección cuadrada $I_z=\frac{ab^3}{12}$, a base, b
  Eje sección circular $I_z=\frac{\pi d^4}{64}$, d diámetro. Semicírculo $\bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$, $I_z=0{,}1098r^4$ (respecto a eje neutro), r radio. Cuarto de cículo $\bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$, $I_z=\frac{\pi r^4}{16}$. Triángulo rectángulo $\bar{y}=\frac{b}{3}$, $I_z=\frac{ab^3}{36}$, a base, b altura.
- Eje paralelo $\bar{I}_z=I_z+\delta^2 A$
- Deflexión: $\frac{\mathrm{d}^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4}=-\frac{w(x)}{EI_z}$, $\frac{\mathrm{d}^3\hat{y}}{\mathrm{d}x^3}=-\frac{V(x)}{EI_z}$, $\frac{\mathrm{d}^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2}=\frac{M(x)}{EI_z}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}x}\approx\theta(x)$, $\int\delta(x-a)\,\mathrm{d}x=r(x-a)$, $\int r(x-a)\mathrm{d}x=(x-a)r(x-a)$, $\int(x-a)r(x-a)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-a)^2r(x-a)$, $\int\frac{1}{2}(x-a)^2r(x-a)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(x-a)^3r(x-a)$
- Corte en vigas: Sección rectangular$\tau_{xy}=\frac{V(x)}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$, Sección arbitraria $\tau_{xy}=\frac{V(x)}{I_z t}\int_y^c\xi\,\mathrm{d}A$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T=\int_0^L\frac{P^2}{2EA}\,\mathrm{d}x$. Flexión $U_f=\int_0^L\frac{M(x)^2}{2EI}\,\mathrm{d}x$. Torsión eje $U_{To}=\int_0^L\frac{T^2}{2GJ}\,\mathrm{d}x$. Corte (sección rectangular) $U_c=\frac{3}{5}\int_0^L\frac{V(x)^2}{GA}\,\mathrm{d}x$ (A es el área de la sección transversal).
- Pandeo: Ecuación caso general $\frac{\mathrm{d}^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4}+\frac{P}{EI}\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}x^2}=\frac{w(x)}{EI}$. Solución caso especial $w(x)=0$, $\hat{y}(x)=c_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)+c_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right)+c_3x+c_4$.

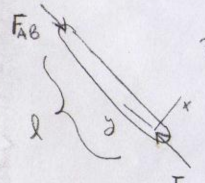
  Ecuación caso columna excéntrica: $\frac{\mathrm{d}^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2}+\frac{P}{EI}\hat{y}=-\frac{Pe}{EI}$, e excentricidad, L largo total columna. Solución $\hat{y}(x)=C_1\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}x\right)+C_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}x\right)-e$. Caso $\hat{y}(0)=0$ y $\hat{y}(L)=0$, $C_1=\frac{e\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}L\right)\right]}{\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}L\right)}$, $C_2=e$, $FS=\frac{S_n'}{\sigma_{adm}}\left(1-\frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)$
- Elasticidad lineal: Ecuación de equilibrio coordenadas Cartesianas $\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}+\rho b_i=0$, relación esfuerzos deformación $T_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$, relación deformación esfuerzos $\varepsilon_{ij}=\frac{(1+\nu)}{E}T_{ij}-\frac{\nu}{E}T_{kk}\delta_{ij}$. Relación entre las constantes de material $\lambda=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=G=\frac{E}{2(1+\nu)}$. Relación deformación desplazamiento $\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$. Función de esfuerzos de Airy $T_{11}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$, $T_{22}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}$, $T_{12}=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$. Ecuación biarmónica $\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=0$.
- Elasticidad lineal esfuerzo plano: $T_{11}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22})$, $T_{22}=\frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11})$, $T_{12}=2G\varepsilon_{12}$.
- Elasticidad lineal deformación plana: $T_{11}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22}]$, $T_{22}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11}]$, $T_{zz}=\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22})$, $T_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}$.
- Elasticidad lineal, coordenadas cilíndricas. Ecuaciones de equilibrio: $\frac{\partial T_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial T_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(T_{rr}-T_{\theta\theta})+\rho b_r=0$, $\frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial z}+2\frac{T_{r\theta}}{r}+\rho b_\theta=0$, $\frac{\partial T_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial T_{zz}}{\partial z}+\frac{T_{rz}}{r}+\rho b_z=0$. Relación deformación desplazamientos $\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r}$, $\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}$, $\varepsilon_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}$, $\varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z}\right)$, $\varepsilon_{r\theta}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right)$, $\varepsilon_{\theta z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta}\right)$. Operador gradiente $\nabla=\frac{\partial}{\partial r}(\quad)\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\quad)\mathbf{e}_\theta+\frac{\partial}{\partial z}(\quad)\mathbf{e}_z$. Potencial de esfuerzos de Airy $T_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}$, $T_{\theta\theta}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}$, $T_{r\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)$.

(1) Pauta Control 3 L1



$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{8L}{14} - R}{\frac{9L}{14} - R}\right) = 0.697903 \text{ rad}$$

$$F_{AB} \operatorname{sen}\theta \, L = F \frac{6L}{14} \Rightarrow F = \frac{14}{6} F_{AB} \operatorname{sen}\theta$$ (1)



Plano x-y ⇒ pasador en los dos extremos (1)

(1) $$\sqrt{\frac{P}{E I_z}}\, l = \pi \Rightarrow F_{AB\,cr} = \frac{\pi^2}{l^2} E I_z$$

$$\Rightarrow \frac{6}{14} \frac{F_{cr}}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\pi^2}{l^2} E I_z$$

$$\Rightarrow F_{cr} = \frac{14}{6} \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\theta \, E I_z = \frac{7}{3} \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen}\theta \, E I_z = 22443.7 \text{ N}$$ (2)

$$l = \left[\left(\frac{8L}{14} - R\right)^2 + \left(\frac{9L}{14} - R\right)^2\right]^{1/2} = 0.577998 \text{ m}$$ (1)

$$I_z = \frac{e d^3}{12} = \frac{d^4}{60} = 2.67 * 10^{-9} \text{ m}^4$$ (1)

Plano y-z ⇒ empotrado en los dos extremos (2)

$$\eta = \sqrt{\frac{P}{E I_y}}$$

L2

$$\hat{z} = C_1 \sin(\eta x) + C_2 \cos(\eta x) + C_3 x + C_4$$

empotrados: $\hat{z}(0) = 0$ $\quad \frac{d\hat{z}}{dx}(0) = 0$ $\quad \hat{z}(l) = 0$ $\quad \frac{d\hat{z}}{dx}(l) = 0$ (1)

$$\frac{d\hat{z}}{dx}(0) = 0 \Rightarrow C_1 \eta + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1 \eta$$ (1)

$$\hat{z}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -C_2$$ (1)

$$\frac{d\hat{z}}{dx}(l) = 0 \Rightarrow C_1 \eta \cos(\eta l) - C_2 \eta \sin(\eta l) - C_1 \eta = 0$$

$$\hat{z}(l) = 0 \Rightarrow C_1 \sin(\eta l) + C_2 \cos(\eta l) - C_1 \eta l - C_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\eta l) - 1 & -\sin(\eta l) \\ \sin(\eta l) - \eta l & \cos(\eta l) - 1 \end{pmatrix}}_{\det = 0 \,\to\, \text{criterio pandeo}} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ (2)

$$(\cos(\eta l) - 1)^2 + \sin(\eta l)(\sin(\eta l) - \eta l) = 0$$

$$\cos^2(\eta l) - 2\cos(\eta l) + 1 + \sin^2(\eta l) - \eta l \sin(\eta l) = 0$$

$$-2\cos(\eta l) + 2 - \eta l \sin(\eta l) = 0$$ (1)

(2) $$\eta l = 2\pi \Rightarrow \sqrt{\frac{F_{AB\,cr}}{E I_y}}\, l = 2\pi$$

$$\Rightarrow F_{AB\,cr} = \frac{4\pi^2}{l^2} E I_y$$

$$I_y = \frac{d e^3}{12} = \frac{d}{12}\left(\frac{d}{5}\right)^3 = \frac{d^4}{12 \times 5^3} = 1.06 * 10^{-10} \text{ m}^4$$ (1)

luego $F_n = \frac{14}{6} \operatorname{sen}\theta \, \frac{4\pi^2 E I_y}{\ell^2}$ 3

$= 3591 \text{ N}$ (1)

luego $F_{máximo} = 3591 \text{ N}$ (2)

(2) Supongamos que $u_r = u_r(r)$ $u_\theta = u_\theta(r)$ $u_z = 0$ 4

$\Rightarrow \varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}$ $\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}$ $\varepsilon_z = 0$ (2)

$\varepsilon_{rz} = 0$ $\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r}\right)$ $\varepsilon_{\theta z} = 0$

$$\circledast \Rightarrow \begin{cases} T_{rr} = 2\mu\, \varepsilon_{rr} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) = 2\mu \frac{du_r}{dr} + \lambda\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r}\right) & (1) \\ T_{\theta\theta} = 2\mu\, \varepsilon_{\theta\theta} + \lambda(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) = 2\mu \frac{u_r}{r} + \lambda\left(\frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r}\right) & (1) \\ T_{r\theta} = \mu\left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r}\right) & (1) \end{cases}$$

ecuación equilibrio (simplificadas)

$$\frac{dT_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(T_{rr} - T_{\theta\theta}) = 0 \quad (i) \quad (1)$$

$$\frac{dT_{r\theta}}{dr} + \frac{2T_{r\theta}}{r} = 0 \quad (ii) \quad (1)$$

(ii) $\Rightarrow$ $T_{r\theta} = \frac{C_0}{r^2}$ C_0 constante (1)

de $\circledast(3) \Rightarrow \mu\left(\frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r}\right) = \frac{C_0}{r^2}$ (1)

sea $u_{\theta p} = \frac{C_1}{r} \Rightarrow -2\mu \frac{C_1}{r^2} = C_0 \Rightarrow C_1 = -\frac{C_0}{2\mu}$ (1)

$\frac{du_{\theta H}}{dr} - \frac{u_{\theta H}}{r} = 0 \Rightarrow u_{\theta H} = C_2 r$ (1)

$$\Rightarrow u_\theta = -\frac{C_0}{2\mu r} + C_2 r \quad (1)$$

Respecto a (ii) de (*)(1,2) se tiene

$$\frac{d}{dr}\left[2\mu\frac{du_r}{dr} + \lambda\left(\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r}\right)\right] + \frac{1}{r}\left(2\mu\frac{du_r}{dr} - 2\mu\frac{u_r}{r}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\mu\frac{d^2u_r}{dr^2} + \lambda\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{\lambda}{r}\frac{du_r}{dr} - \lambda\frac{u_r}{r^2} + \frac{2\mu}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{2\mu}{r^2}u_r = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow (2\mu+\lambda)\frac{d^2u_r}{dr^2} + (2\mu+\lambda)\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - (2\mu+\lambda)\frac{u_r}{r^2} = 0$$

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0$$

solución $\quad u_r = \frac{C_3}{r} + C_4 r \quad (1)$

Si se supone que en $r=a$ no hay desplazamiento (1) radial (del enunciado tampoco hay desplazamiento radial en $r=b$), se tiene $\quad u_r(a)=0 \quad u_r(b)=0 \Leftrightarrow C_3=C_4=0 \quad (1)$

En $r=b$ $\quad u_\theta(b)=0 \Rightarrow -\frac{C_0}{2\mu b} + C_2 b = 0 \quad (1)$

se tiene, por ejemplo $\quad C_2 = \frac{C_0}{2\mu b^2}$

En $r=a$ $\quad u_0 = -\frac{C_0}{2\mu a} + \frac{C_0}{2\mu b^2}a \quad (1)$

$$\Rightarrow u_0 = \frac{C_0}{2\mu}\underbrace{\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}\right)}_{\frac{a^2-b^2}{b^2 a}}$$

$$\Rightarrow C_0 = 2\mu u_0 \frac{a b^2}{(a^2-b^2)} \quad (1)$$

Solución: $\quad u_r = 0 \quad u_z = 0$

$$u_\theta = \frac{C_0}{2\mu}\left(\frac{r}{b^2} - \frac{1}{r}\right) \quad (3)$$

$$= \frac{u_0 a b^2}{(a^2-b^2)}\left(\frac{r}{b^2} - \frac{1}{r}\right)$$