Control 1, Mecánica de Solidos ME3204
2do semestre 2014

Profesor: R. Bustamante

1. (20 puntos) Un bloque de 25 toneladas de peso está siendo soportado por tres columnas, dos de acero y una de bronce, como se muestra en la Figura 1. Determine el cambio de

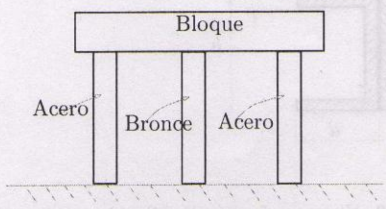


Figura 1: Bloque apoyado en tres columnas

temperatura en °F necesario para dejar la columna de bronce libre de esfuerzos. Las columnas tienen igual área transversal $A_s = 2\text{in}^2$ y son de igual longitud inicial.

Datos: $\alpha_{acero} = 6{,}5 \times 10^{-6} 1/°\text{F}$; $\alpha_{bronce} = 11{,}2 \times 10^{-6} 1/°\text{F}$; $E_{acero} = 30 \times 10^6\text{psi}$; $E_{bronce} = 15 \times 10^6\text{psi}$.

2. (20 puntos) En la Figura 2 se tiene un eje primario de longitud L apoyado en dos rodamientos. El eje primario está conectado a una rueda dentada de diámetro D, y por medio de este se

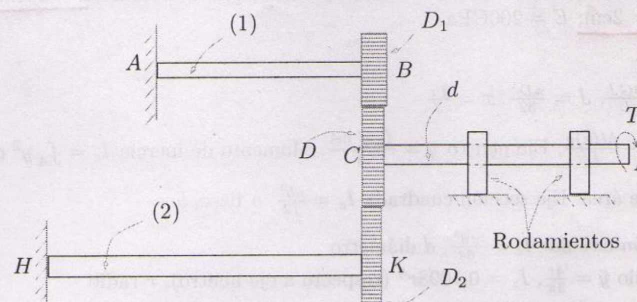


Figura 2: Bloque apoyado en tres columnas

aplica un torque T a dos ejes empotrados (1), (2), de diámetros d_1, d_2, longitudes L_1, L_2 y módulos de corte G_1 y G_2, respectivamente, los cuales estan conectados a engranades de diámetros D_1 y D_2. El eje primario tiene diámetro d y módulo de corte G.

Determine el ángulo de torsión total en F.

3. En la Figura 3 se muestra una viga en un apoyo pasador y uno tipo rodillo, bajo la acción de una carga constante w_o y una puntual F. En la figura inferior se tiene una vista ampliada

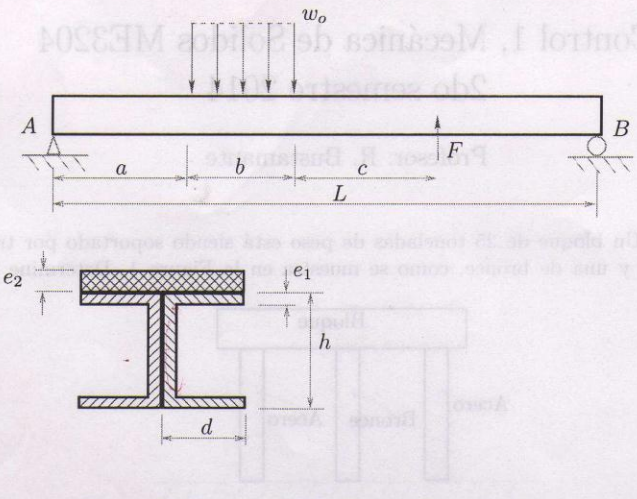


Figura 3: Viga con fuerza distribuída y puntual

de la sección de la viga. La viga se fabrica con dos canales iguales de espesor e_1 (sección C) y una plancha de espesor e_2, los que se unen con soldadura. Los canales y la plancha son del mismo material.

a) (5 puntos) Determine el eje neutro de la sección e I_z.

b) (10 puntos) Para $x = L/2$ calcule la deflexión.

c) (5 puntos) Determine el máximo esfuerzo normal por flexión en el mismo punto $x = L/2$.

d) (5 puntos) ¿Cual es el esfuerzo normal por flexión en $x = L/2$, $y = 0$ (eje neutro)?

Datos: $L = 10$m; $a = 3$m; $b = 2$m; $c = 3{,}5$m; $w_o = 800$N/m; $F = 30$kN; $d = 20$cm; $h = 25$cm; $e_1 = 1$cm; $e_2 = 2$cm; $E = 200$GPa.

Formulario:

- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$, $J = \frac{\pi D^4}{32}$, $\tau = \frac{Tr}{J}$
- Flexión: $\sigma_x = -\frac{M(x)y}{I_z}$, Eje neutro $\bar{y} = \frac{\int_A y' \, \mathrm{d}A}{A}$, Momento de inercia $I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A$
- Propiedades de área: Eje sección cuadrada $I_z = \frac{ab^3}{12}$, a base, b
  - Eje sección circular $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$, d diámetro
  - Semicírculo $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$, $I_z = 0{,}1098r^4$ (respecto a eje neutro), r radio
  - Cuarto de cículo $\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$, $I_z = \frac{\pi r^4}{16}$
  - Triángulo rectángulo $\bar{y} = \frac{b}{3}$, $I_z = \frac{ab^3}{36}$, a base, b altura
- Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A$
- Deflexión: $\frac{d^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} = -\frac{w(x)}{EI_z}$, $\frac{d^3\hat{y}}{\mathrm{d}x^3} = -\frac{V(x)}{EI_z}$, $\frac{d^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$, $\frac{d\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta(x)$, $\int \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = r(x-a)$, $\int r(x-a)\mathrm{d}x = (x-a)r(x-a)$, $\int (x-a)r(x-a)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)$, $\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a)$
- Unidades inglesas: 1kgf=2.2046lbf, 1psi=1lbf/in^2, 1in=1pulgada.

1

Pauta Control

(1) Superposición como $\alpha_b > \alpha_a$ se tiene que la barra de bronce se alarga ($\Delta T > 0$) o acorta ($\Delta T < 0$) más que las de acero $\Rightarrow$ para que la barra o columna de bronce quede libre de cargas $\Rightarrow$ $\Delta T < 0$ (2)

- Se aplica $\Delta T < 0$ $\Rightarrow$ $L_{f_a} = L\,(1 + \alpha_a \Delta T)$ largo barra acero con ΔT (2)

$L_{f_b} = L\,(1 + \alpha_b \Delta T)$ largo barra bronce con ΔT (2)

- Se coloca peso P que debe causar la deformación (compresión)

$$\varepsilon_a = \frac{L_{f_a} - L_{f_b}}{L_{f_a}}$$ (sin signo) (3)

de esta forma solo las columnas de acero soportan el peso

$$= \frac{\cancel{L}(1+\alpha_a \Delta T) - \cancel{L}(1+\alpha_b \Delta T)}{\cancel{L}(1+\alpha_a \Delta T)}$$

$$= \frac{\Delta T\,(\alpha_a - \alpha_b)}{1 + \alpha_a \Delta T}$$ (2)

pero $\varepsilon_a = \dfrac{\sigma_a}{E_a}$ y $\sigma_a = \dfrac{P}{2A_{sección}}$ (1)

$$\Rightarrow \frac{P}{2E_a A_s} = \frac{\Delta T\,(\alpha_a - \alpha_b)}{1 + \alpha_a \Delta T}$$ (2)

2

luego $$\Delta T = \frac{P}{2A_s E_a(\alpha_a - \alpha_b) - P\alpha_a}$$ (2)

usando los datos del problema con

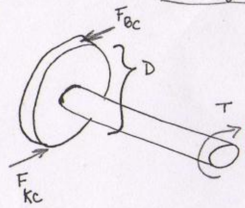
$$P = 25 * 10^3 * 2.2046 \text{ lbf}$$ (1)

se obtiene $\Delta T = -97.6596\ °F$ (3)

20 ptos.

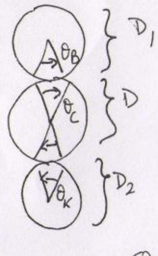
b) (2)

DCL eje primario



$$T = \frac{D}{2}\left(F_{BC} + F_{KC}\right) \quad (1) \quad ⊛$$

(1)

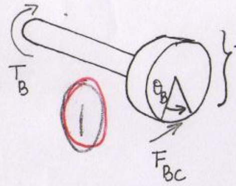


mismo arco en 1, 2, eje primario

$$\Rightarrow \theta_B D_1 = \theta_C D = \theta_K D_2$$

$$\Rightarrow \theta_B = \theta_C \frac{D}{D_1} \quad (1) \qquad \theta_K = \theta_C \frac{D}{D_2} \quad (1)$$

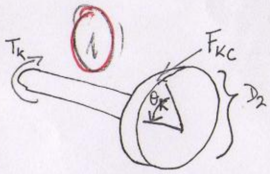
DCL eje 1



(1)

$$\left.\begin{aligned} T_B &= F_{BC}\frac{D_1}{2} \\ T_B &= \theta_B \frac{G_1 J_1}{L_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{BC} = \frac{2\theta_B G_1 J_1}{L_1 D_1} \quad (2)$$

DCL eje 2



(1)

$$\left.\begin{aligned} T_K &= F_{KC}\frac{D_2}{2} \\ T_K &= \theta_K \frac{G_2 J_2}{L_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{KC} = \frac{2\theta_K G_2 J_2}{L_2 D_2} \quad (2)$$

usando estos dos resultados en ⊛ se tiene

$$T = \frac{D}{2}2\left(\frac{\theta_B G_1 J_1}{L_1 D_1} + \theta_K \frac{G_2 J_2}{L_2 D_2}\right) \quad (2) \quad ✪$$

pero los ángulos θ_B, θ_K no son independientes, pues hay un engranaje en C en contacto con engranajes en B y K

Luego para ✪ se tiene

$$T = \theta_C D^2\left(\frac{G_1 J_1}{L_1 D_1^2} + \frac{G_2 J_2}{L_2 D_2^2}\right) \quad (1)$$

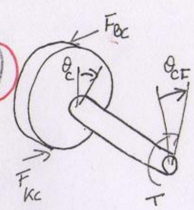
$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32}$$

$$\Rightarrow \theta_C = \frac{T}{D^2\left(\frac{G_1 J_1}{L_1 D_1^2} + \frac{G_2 J_2}{L_2 D_2^2}\right)} \quad (1)$$

$$J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32}$$

DCL eje primario

(1)



$$T = \theta_{CF}\frac{GJ}{L}$$

$$\Rightarrow \theta_{CF} = \frac{TL}{GJ} \quad (1) \qquad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

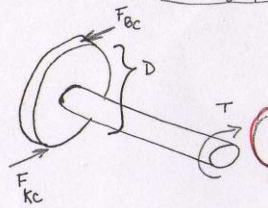
luego $\theta_F = \theta_{CF} + \theta_C$ ← mismo sentido (2)

$$\Rightarrow \theta_F = \frac{32\,TL}{\pi G d^4} + \frac{32\,T}{\pi D^2\left(\frac{G_1 d_1^4}{L_1 D_1^2} + \frac{G_2 d_2^4}{L_2 D_2^2}\right)} \quad (2)$$

20 ptos

b) 2

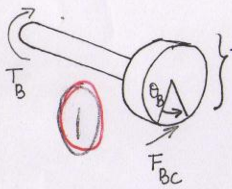
DCL eje primario



$$T = \frac{D}{2}\left(F_{BC} + F_{KC}\right) \quad (1) \quad ⊛$$

(1)

DCL eje 1

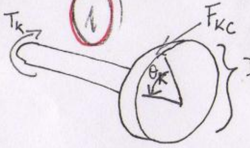


(1)

$$\left.\begin{aligned} T_B &= F_{BC}\frac{D_1}{2} \\ T_B &= \theta_B \frac{G_1 J_1}{L_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{BC} = \frac{2\theta_B G_1 J_1}{L_1 D_1} \quad (2)$$

DCL eje 2

(1)



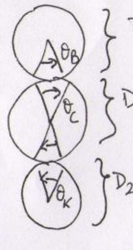
$$\left.\begin{aligned} T_K &= F_{KC}\frac{D_2}{2} \\ T_K &= \theta_K \frac{G_2 J_2}{L_2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F_{KC} = \frac{2\theta_K G_2 J_2}{L_2 D_2} \quad (2)$$

usando estos dos resultados en ⊛ se tiene

$$T = \frac{D}{2}\,2\left(\theta_B \frac{G_1 J_1}{L_1 D_1} + \theta_K \frac{G_2 J_2}{L_2 D_2}\right) \quad (2) \quad ✪$$

pero los ángulos θ_B, θ_K no son independientes, pues hay un engranaje en C en contacto con engranajes en B y K

20 ptos



mismo arco en 1, 2, eje primario

$$\Rightarrow \theta_B D_1 = \theta_C D = \theta_K D_2$$

$$\Rightarrow \theta_B = \theta_C \frac{D}{D_1} \qquad \theta_K = \theta_C \frac{D}{D_2}$$

(1) (1)

Luego para ✪ se tiene

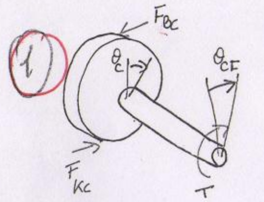
$$T = \theta_C D^2\left(\frac{G_1 J_1}{L_1 D_1^2} + \frac{G_2 J_2}{L_2 D_2^2}\right) \quad (1)$$

$$\Rightarrow \theta_C = \frac{T}{D^2\left(\frac{G_1 J_1}{L_1 D_1^2} + \frac{G_2 J_2}{L_2 D_2^2}\right)} \quad (1)$$

$$J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32} \qquad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32}$$

DCL eje primario

(1)



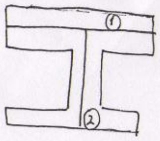
$$T = \theta_{CF}\frac{GJ}{L}$$

$$\Rightarrow \theta_{CF} = \frac{TL}{GJ} \quad (1) \qquad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

luego $\theta_F = \theta_{CF} + \theta_C$ ← mismo sentido (2)

$$\Rightarrow \theta_F = \frac{32\,TL}{\pi G d^4} + \frac{32\,T}{\pi D^2\left(\frac{G_1 d_1^4}{L_1 D_1^2} + \frac{G_2 d_2^4}{L_2 D_2^2}\right)} \quad (2)$$

③ ⓐ



$\bar{y}_1 = h + \frac{e_2}{2} = 0.26\ m$

$A_1 = 2 d e_2 = 0.008\ m^2$ 1

$\bar{y}_2 = \frac{h}{2} = 0.125\ m$

$A_2 = 2\left[d h - (d - e_1)(h - 2e_1) \right] = 0.0126\ m^2$

$\Rightarrow \bar{y}_T = \dfrac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = 0.177427 m$ 2

$I_z = I_{z_1} + I_{z_2}$

$I_{z_1} = \dfrac{2 d e_1^3}{12} + (\bar{y}_1 - \bar{y}_T)^2 A_1 = 0.0000545795\ m^4$ 1

$I_{z_2} = 2\left[\dfrac{d h^3}{12} - \dfrac{(d - e_1)(h - 2e_1)^3}{12} + (\bar{y}_T - \bar{y}_2)^2 \dfrac{A_2}{2} \right] = 0.000170177\ m^4$

$\Rightarrow I_z = 0.0002247 57\ m^4$ 1

$2.25 \times 10^{-4}\ m^4$

ⓑ $w(x) = w_0 \left[r(x-a) - r(x-a-b) \right] - F\delta(x-a-b-c)$

$\Rightarrow \dfrac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\dfrac{1}{EI_z} \left\{ w_0 \left[r(x-a) - r(x-a-b) \right] - F\delta(x-a-b-c) \right\}$ 1

$\Rightarrow \dfrac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\dfrac{1}{EI_z} \left\{ w_0 \left[(x-a) r(x-a) - (x-a-b) r(x-a-b) \right] - F r(x-a-b-c) \right\} + C_3$ 1

$\Rightarrow \dfrac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -\dfrac{1}{EI_z} \left\{ \dfrac{w_0}{2} \left[(x-a)^2 r(x-a) - (x-a-b)^2 r(x-a-b) \right] - F(x-a-b-c) r(x-a-b-c) \right\} + C_3 x + C_2$ 1

$\Rightarrow \dfrac{d\hat{y}}{dx} = -\dfrac{1}{EI_z} \left\{ \dfrac{w_0}{6} \left[(x-a)^3 r(x-a) - (x-a-b)^3 r(x-a-b) \right] - \dfrac{F}{2}(x-a-b-c)^2 r(x-a-b-c) \right\} + C_3 \dfrac{x^2}{2} + C_2 x + C_1$ 1

$\Rightarrow \hat{y} = -\dfrac{1}{EI_z} \left\{ \dfrac{w_0}{\boxed{20}\ 24} \left[(x-a)^4 r(x-a) - (x-a-b)^4 r(x-a-b) \right] - \dfrac{F}{6}(x-a-b-c)^3 r(x-a-b-c) \right\} + C_3 \dfrac{x^3}{6} + C_2 \dfrac{x^2}{2} + C_1 x + C_0$ 1

$\dfrac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \qquad \hat{y}(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0$ 1

$\dfrac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(L) = 0 \Rightarrow C_3 L = \dfrac{1}{EI_z} \left\{ \dfrac{w_0}{2} \left[(L-a)^2 - (L-a-b)^2 \right] - F(L-a-b-c) \right\}$

$\Rightarrow C_3 = -0.0000787517\ \frac{1}{m^2}$ 1

$\hat{y}(L)=0 \Rightarrow C_1 L = \frac{1}{EI_z}\left\{ \frac{w_0}{\boxed{20}\,24}\left[(L-a)^4-(L-a-b)^4\right] - \frac{F}{6}(L-a-b-c)^3\right\} - C_3\frac{L^3}{6}$

$\Rightarrow C_1 = \cancel{0.00143303}$ 1

$=$

Luego $\hat{y}(L/2) = -\frac{w_0}{24/\cancel{20}\,EI_z}\left(\frac{L}{2}-a\right)^4 + \frac{C_3}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_1\frac{L}{2}$

$= \cancel{0.00551023}$ m 2

$=$

c) $M(L/2) = EI_z \left.\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}\right|_{L/2}$ 1

$= EI_z\left[-\frac{1}{EI_z}\frac{w_0}{2}\left(\frac{L}{2}-a\right)^2 + C_3\frac{L}{2}\right]$

$= \cancel{-19300}$ Nm 1

$y_{max} = \text{abs}\begin{cases} e_2+h-\bar{y}_T = 0.0925728 \text{ m} \\ -\bar{y}_T = -0.177427 \text{ m}\end{cases}$

luego $y_{max} = -0.177427$ m 1

$\sigma_{max}\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{-M(L/2)\,y_{max}}{I_z} = -1.52358*10^7$ Pa

$= -\cancel{15.2358}$ MPa 2

$=$

d) $\sigma_x = 0$ pues $y=0$ es la posición del eje neutro

5

25ptos