

# Examen, Resistencia de Materiales ME3202 ME46A

## 1er semestre 2010

Roger Bustamante

- En la figura 1 se tiene un mecanismo para elevar carga. La fuerza soportada es de  $W = 10\text{kN}$ . Asumiendo que las distintas barras y componentes de este montacarga tienen un peso despreciable, determine las reacciones sobre el elemento CDE. (20 puntos)

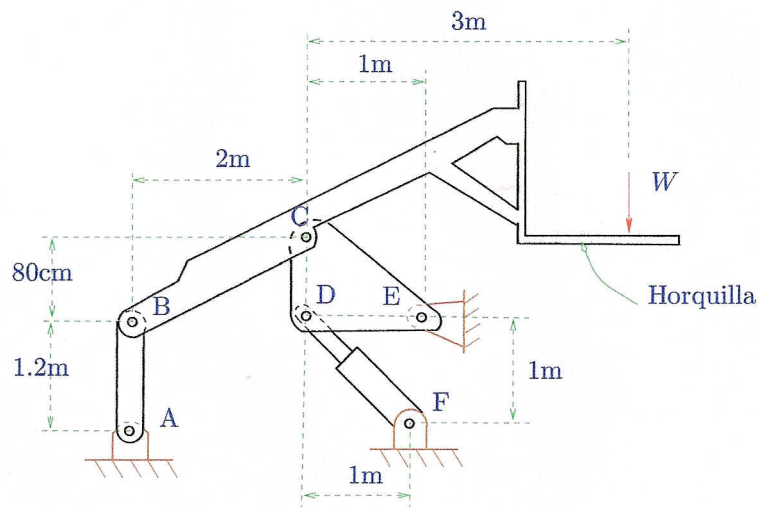


Figura 1: Mecanismo para elevar carga

- La viga de la figura 2 tiene una sección rectangular de lados  $a$ ,  $b$ . En el plano  $x - y$  la viga está sometida a una fuerza distribuida lineal (con valor máximo de  $2000\text{N/m}$ ), en tanto en el plano  $x - z$  está sometida a una fuerza distribuida uniforme de  $2500\text{N/m}$  más una puntual de  $3000\text{N}$ . La figura superior izquierda muestra la viga en una vista en el plano  $x - y$  en tanto en la figura inferior izquierda tenemos una vista de la viga en el plano  $x - z$ .

Para un corte imaginario hecho a una distancia de  $1.5\text{m}$  desde el extremo izquierdo determine los estados de esfuerzos para los puntos (1) y (2). Los puntos (1) y (2) se muestran en la vista tridimensional del lado derecho de la figura para la zona de corte imaginario. Dibuje en un cubo diferencial las componentes de los esfuerzos determinadas en dichos puntos. (25 puntos)

Datos:

$$a = 5\text{cm}, \quad b = 12\text{cm}, \quad E = 100\text{GPa}, \quad G = 40\text{GPa}.$$

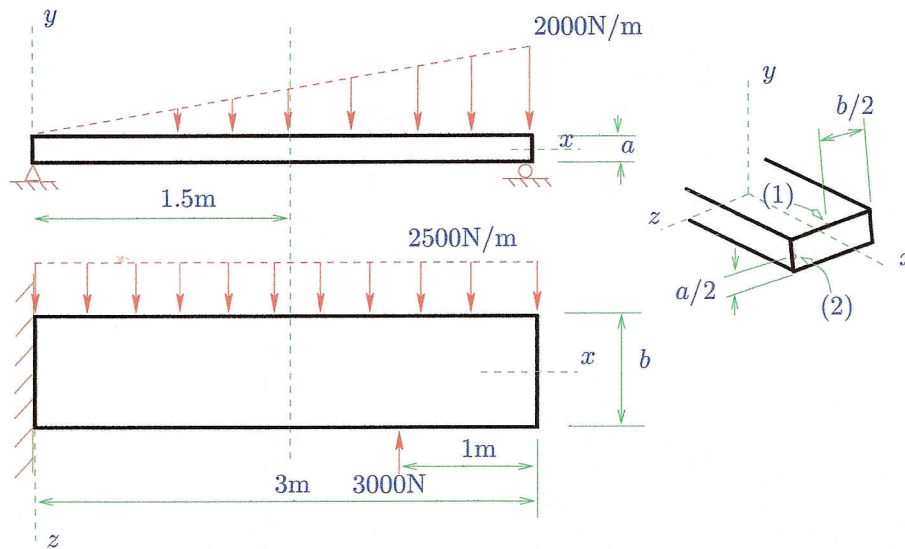


Figura 2: Viga

3. Responda a las siguientes preguntas conceptuales:

a) Dibuje en un cubo diferencial como el de la figura 3 los estados de esfuerzos (4 puntos):

$$\sigma_x = 10\text{MPa}, \quad \sigma_y = -5\text{MPa}, \quad \tau_{yz} = 3\text{MPa}$$

y

$$\sigma_x = \sigma_y = 30\text{MPa}, \quad \tau_{xy} = -1\text{MPa}, \quad \tau_{xz} = 20\text{MPa}.$$

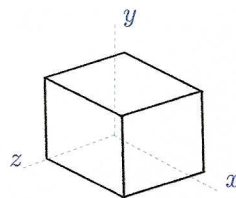


Figura 3: Cubo diferencial

- b) En el caso bidimensional el tensor de esfuerzos es  $\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{pmatrix}$ . ¿Por que es simétrico? ¿Como se demuestra? (5 puntos)
- c) ¿Cual es la simplificación mas importante para un problema de deformación plana? (3 puntos)
- d) ¿Que es el radio de curvatura  $R$  en flexión? (3 puntos)
- e) ¿Cual es el significado físico de los esfuerzos principales? (4 puntos)
- f) En fatiga: ¿Como se obtiene la resistencia a la fatiga  $S'_n$ ? ¿Para que sirve la recta de Goodman y como se usa? (6 puntos)

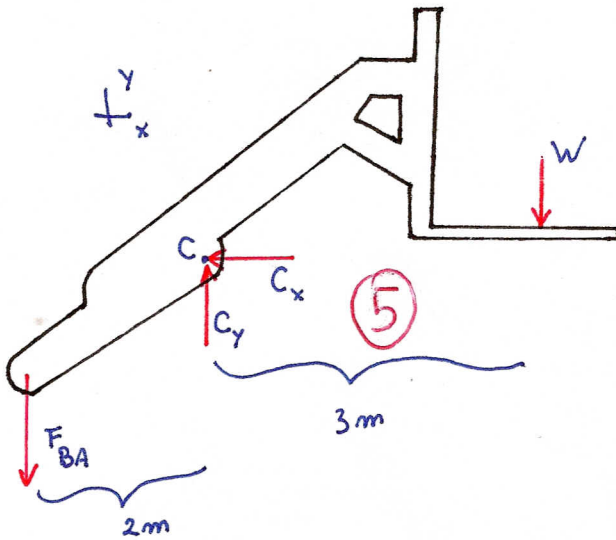
## Formulario

- Torsión:  $T = \frac{\theta G J}{L}$ . Sección circular  $J = \frac{\pi D^4}{32}$  y  $\tau = \frac{T r}{J}$
- Flexión: Esfuerzo  $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$ . Eje neutro  $\bar{y} = \int_A y' dA$ . Momento de inercia  $I_z = \int_A y^2 dA$ . Segundo momento área sección rectangular  $I_z = \frac{ab^3}{12}$ ; sección circular  $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$ . Eje paralelo al neutro  $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$ .
- Corte sección arbitraria:  $\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi dA$ . Sección rectangular  $\tau_{xy} = \frac{V}{2I} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)$ .
- Energía de deformación: Extension de una barra  $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$ . Flexión  $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$ . Torsión eje  $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$ . Corte (sección rectangular)  $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$  ( $A$  es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales:  $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$ ,  $\tau = \sqrt{\left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$ .
- Esfuerzo de Von Mises  $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$ .
- Pandeo: Ecuación caso general  $\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{w(x)}{EI}$ . Solución caso especial  $w(x) = 0$ ,  $\hat{y}(x) = c_1 \sin \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + c_2 \cos \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + c_3 x + c_4$ .  
Ecuación caso columna excéntrica:  $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} + \frac{P}{EI} \hat{y} = -\frac{Pe}{EI}$ .  
Otras expresiones  $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$ ,  $\frac{d \hat{y}}{dx} \approx \theta$ .

1)

Pauta Examen

1) DCL BC



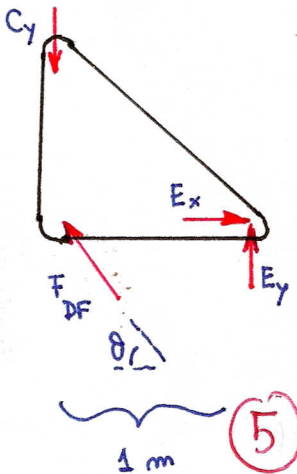
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow F_{BA} \cdot 2 = W \cdot 3$$

$$\Rightarrow F_{BA} = \frac{3}{2} W = 15 \text{ kN} \quad (2)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow C_x = 0$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow C_y = W + F_{BA} = \frac{5}{2} W = 25 \text{ kN} \quad (2)$$

DCL CDE



$$\sum M_E = 0 \Rightarrow C_y \cdot 1 = F_{DF} \frac{\sin \theta}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

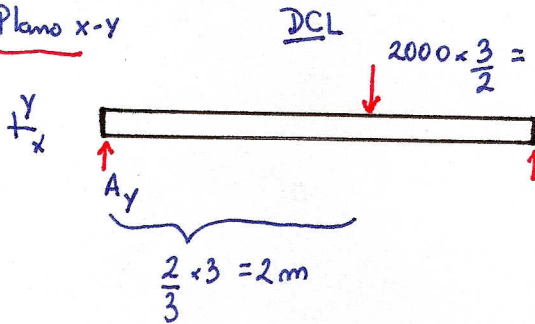
$$\Rightarrow F_{DF} = \sqrt{2} C_y = 35,355 \text{ kN} \quad (2)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow E_y = C_y - F_{DF} \frac{\cos \theta}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0 \quad (2)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow E_x = F_{DF} \cos \theta = 24,99976 \text{ kN} \approx 25 \text{ kN} \quad (2)$$

- 2) Se puede trabajar en cada plano x-y, x-z de forma separada para al final dibujar el estado de esfuerzos para cada punto

Plano x-y

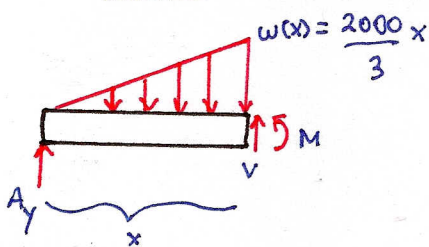


$$\sum M_z = 0 \Rightarrow B \times 3 = 3000 \times 2$$

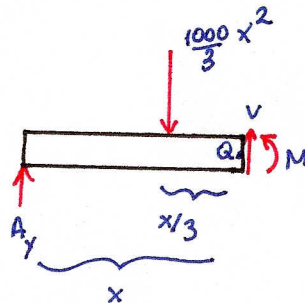
$$\Rightarrow B = 2000 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y = 3000 - B = 1000 \text{ N}$$

M(x), V(x)



$\Leftrightarrow$



$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M = A_y x - \frac{1000}{9} x^3 = 1000 x - \frac{1000}{9} x^3$$

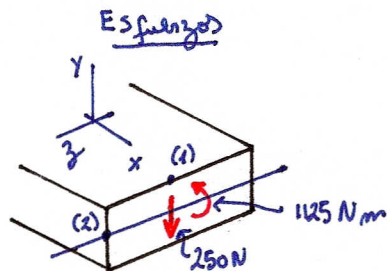
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = \frac{1000}{3} x^2 - A_y = \frac{1000}{3} x^2 - 1000$$

Zona de interés  $x = 1.5$

$$\Rightarrow M = 1125 \text{ Nm}$$

$$V = -250 \text{ N}$$

3



(1). Esfuerzo de compresión por flexión por 1125 Nm

- No hay esfuerzo de corte por fuerza de corte de 250 N (2)

(2). No hay esfuerzo normal por flexión

- Hay esfuerzo de corte por V (2)

$$(1) \quad \sigma_x = - \frac{1125}{I_z} \cdot \frac{a}{2} \quad I_z = \frac{ba^3}{12} = 0.00000125 \text{ m}^4 \quad (1)$$

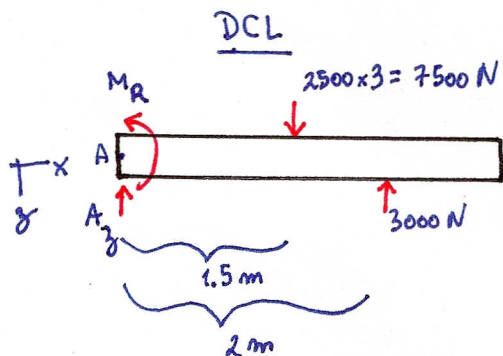
$$\Rightarrow \sigma_x = -22.5 \text{ MPa} \quad (1)$$

$$(2) \quad \tau_{xy} = \frac{-250}{2I_z} \left( \frac{a^2}{4} - y^2 \right) = - \frac{250}{2I_z} \cdot \frac{a^2}{4} \quad (1)$$

$\uparrow$   
 $= 0$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = 62500 \text{ Pa} = -0.0625 \text{ MPa} \quad (1)$$

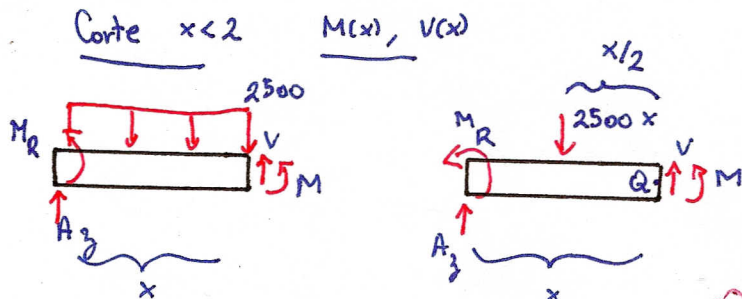
Plano x-z



$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M_R = 7500 \times 1.5 - 3000 \times 2 = 5250 \text{ Nm} \quad (0.5)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow A_z = 7500 - 3000 = 4500 \text{ N} \quad (0.5)$$





$$\sum M_y = 0 \Rightarrow M = A_z x - \frac{2500 x^2}{2} - M_R \quad (1)$$

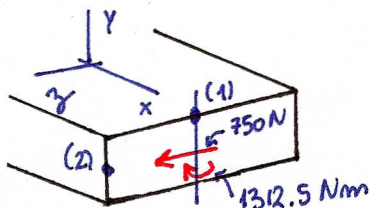
$$\sum F_z = 0 \Rightarrow V = 2500 x - A_z \quad (1)$$

Luego para  $x = 1.5$

$$M = -1312.5 \text{ Nm} \quad (0.5)$$

$$V = -750 \text{ N} \quad (0.5)$$

### Esfuerzos



(1). Hay esfuerzo de corte por 750 N 2

• No hay esfuerzo normal por flexión

(2). No hay esfuerzo de corte por 750 N 2

• Hay esfuerzo de compresión por 1312.5 Nm (flexión)

$$(1) \quad \tau_{xz} = \frac{750}{2 I_y} \left( \frac{b^2}{4} - z^2 \right) \quad \downarrow = 0$$

$$I_y = \frac{ab^3}{12} = 0.0000072 \text{ m}^4$$

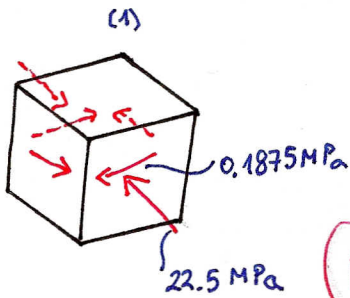
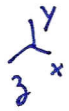
$$\Rightarrow \tau_{xz} = 0.1875 \text{ MPa} \quad (1)$$

$$(2) \quad \sigma_x = - \frac{1312.5}{I_y} b/2$$

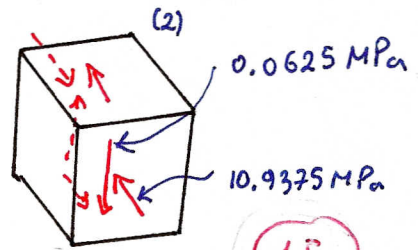
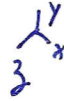
$$\Rightarrow \sigma_x = -10.9375 \text{ MPa} \quad (1)$$

51

Cubos diferenciales



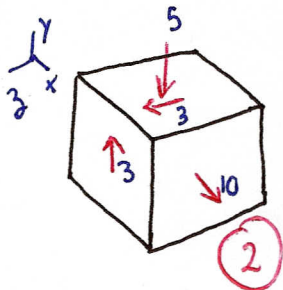
1.5



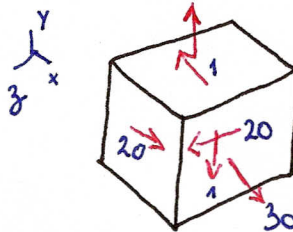
1.5



3) a)



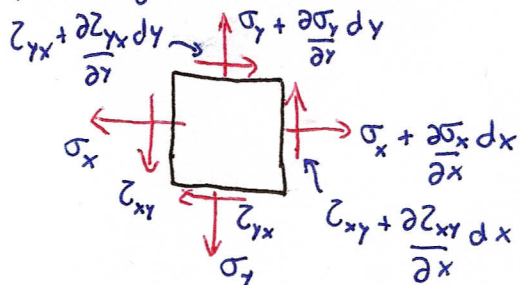
$$\sigma_x = 10 \quad \sigma_y = -5 \quad \tau_{yz} = 3$$



$$\sigma_x = \sigma_y = 30 \quad \tau_{xy} = -1 \quad \tau_{xz} = 20$$

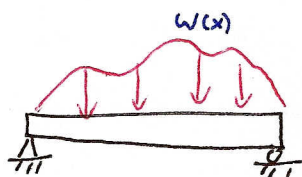
b) El tensor es simétrico como resultado de la aplicación del balance de momento angular igual a cero. (3)

En un cuadrado diferencial se dibujan las componentes del esfuerzo, y luego se hace suma de torques igual a cero (2)

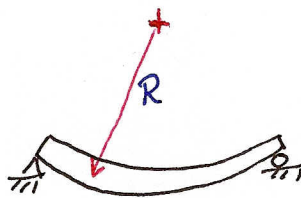


c) En un modelo de deformación plana, por ejemplo en el plano  $x-y$ , se asume que no hay deformación en la dirección  $z$ . No hay deformación longitudinal ni de corte en la dirección  $z$ . Se asume que el cuerpo tiene la misma forma en la dirección  $z$  y que es infinitamente largo en esa dirección. Todas las fuerzas aplicadas solo tienen componente en  $x, y$  (1)

- 7) d) En una viga en flexión, al producirse la deformación de la viga, se puede definir un radio  $R$ , con el que localmente se tiene la forma curva de la viga punto a punto (2)



viga bajo la  
acción de la fuerza  
 $w(x)$



viga deformada

- e) El tensor de esfuerzos  $\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix}$  puede ser escrito con distintos sistemas de coordenadas. El tensor es el mismo, pero sus componentes van a cambiar de acuerdo a la orientación del sistema de coordenadas. (2)

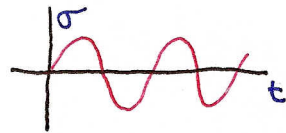
Luego hay un sistema de coordenadas para el cual las componentes de corte desaparecen y las componentes normales son máximas y mínimas, respectivamente. Estos son los esfuerzos principales.

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$$

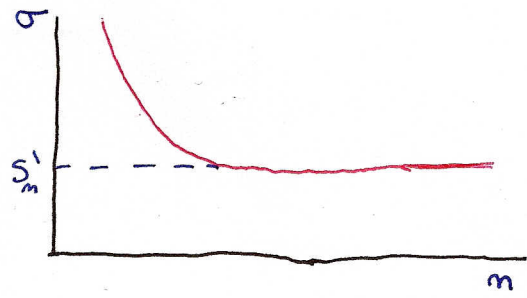
← mismo tensor en  
otro sistema de  
coordenadas

(2)

f) la probeta, por ejemplo cilíndrica, es sometida a un esfuerzo alternante  $\sigma$ , de la forma

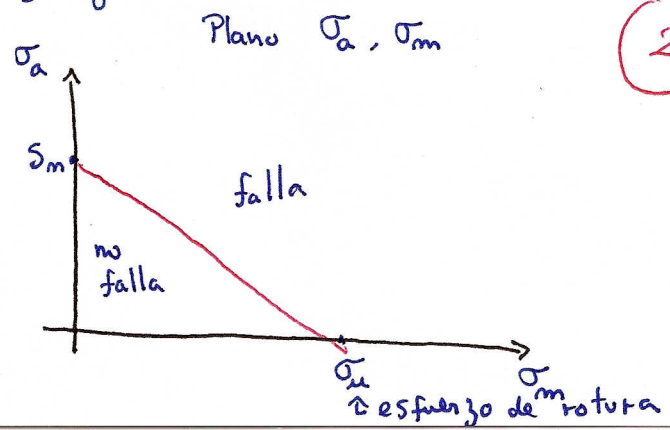


Para distintos valores para  $\sigma$  se cuentan el número de ciclos  $n$  para la falla por fatiga, y se obtiene un gráfico de la forma



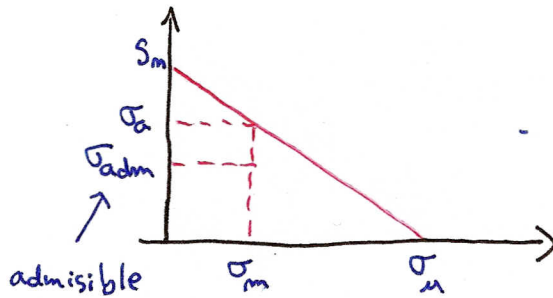
$S'_m$  es el valor de  $\sigma$  para el que  $n \rightarrow \infty$

En el caso se aplicarse un esfuerzo constante de tracción  $\sigma_m$  más uno alternante  $\sigma_a$ , se puede esperar que la resistencia a la fatiga disminuya. La recta de Goodman permite determinar la zona segura en la cual no hay falla por fatiga.



9]

En general se puede asumir  $\sigma_m$  dato, y por lo tanto se puede usar para encontrar  $\sigma_a$  que no cause falla por fatiga, o bien el factor de seguridad para que no haya falla por fatiga



F.S. : factor de  
Seguridad

$$F.S. = \frac{\sigma_a}{\sigma_{adm}}$$

2