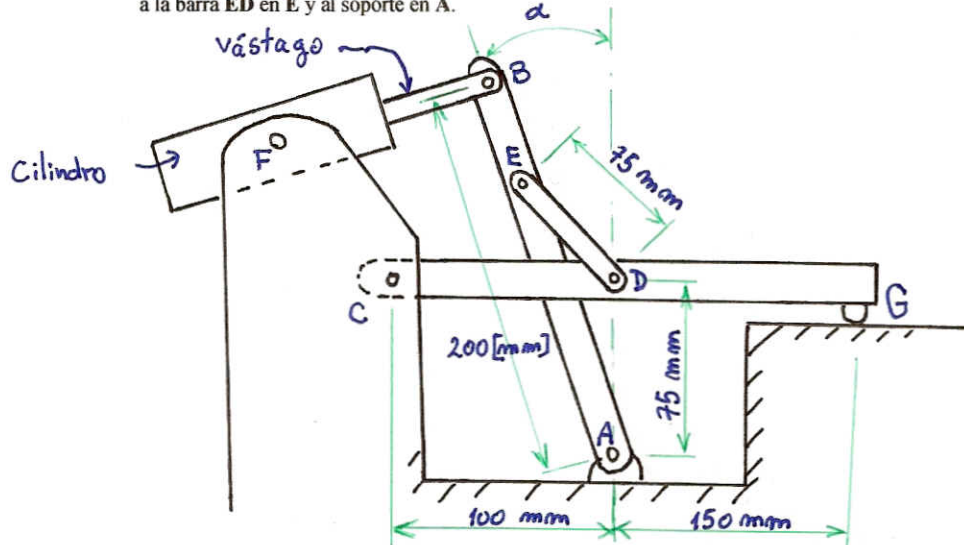


## Examen. Resistencia de Materiales ME3202-1 46A-2

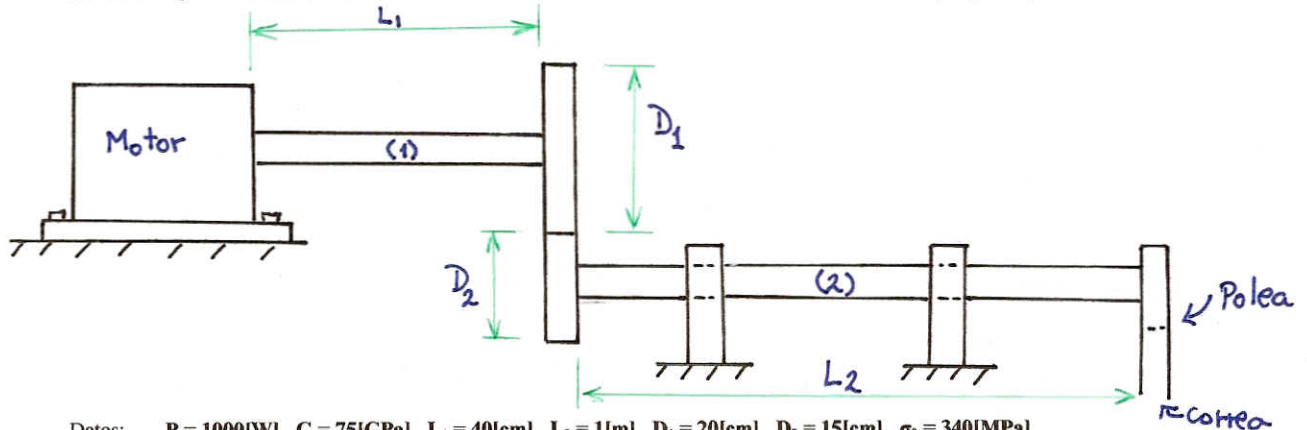
11/12 /2009

Profesor: Roger Bustamante

- 1) El cilindro neumático de la figura oscila respecto al punto F. Este cilindro acciona la palanca AB de la mordaza. Para una presión de  $550[\text{Pa}]$  contra el émbolo de  $45[\text{mm}]$  de diámetro del cilindro, encuentre la fuerza de sujeción en G para  $\alpha=10^\circ$ . En esa posición el vástago del émbolo es perpendicular a AB. Nótese que la barra AB sólo está conectada al cilindro en B, a la barra ED en E y al soporte en A. (20 puntos)

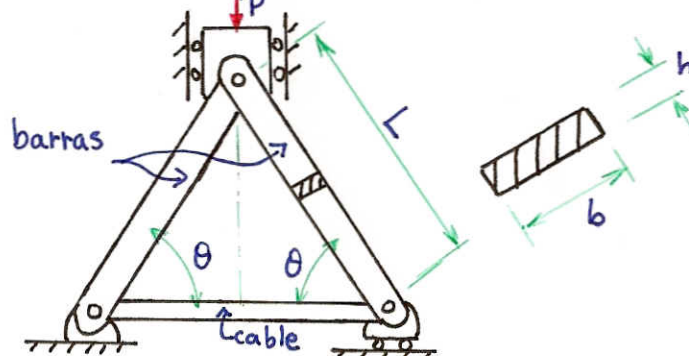


- 2) El motor de la figura le entrega una potencia  $P$  al eje (1). Este eje gira con una velocidad angular  $w_1$  y está conectado al eje (2) a través de engranajes de diámetros  $D_1$  y  $D_2$ , respectivamente. En la transmisión entre los engranajes no hay pérdida de potencia. El eje (1) tiene una sección cuadrada de lados  $a$ , y el eje (2) tiene una sección circular de diámetro  $d$ , ambos son hechos del mismo material. Con un factor de seguridad F.S. determine las mínimas dimensiones para  $a$  y  $d$  de forma tal que los ejes (1) y (2) no fallen bajo el criterio del esfuerzo de corte máximo. ¿Cuál es el ángulo total por torsión en el punto en donde está la polea? (20 puntos)



Datos:  $P = 1000[\text{W}]$   $G = 75[\text{GPa}]$   $L_1 = 40[\text{cm}]$   $L_2 = 1[\text{m}]$   $D_1 = 20[\text{cm}]$   $D_2 = 15[\text{cm}]$   $\sigma_0 = 340[\text{MPa}]$   
F.S. = 1.5  $w_1 = 300 [\text{rpm}]$

- 3) Con un factor de seguridad F.S. determine la máxima carga  $P$  para que ninguna componente del sistema falle. Las barras tienen una sección rectangular de lados  $b$  y  $h$ , en tanto el cable tiene un diámetro  $d$ . (20 puntos)



Datos:  $\sigma_0$  (cable) =  $200[\text{MPa}]$   $h = 1.5[\text{cm}]$   $b = 5[\text{cm}]$   $L = 1[\text{m}]$   $\theta = 75^\circ$   $E$  (barras) =  $190[\text{GPa}]$

F.S. = 2

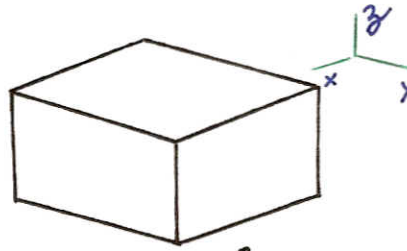
$d = 1.5 [\text{cm}]$

4) Preguntas conceptuales:

(10 puntos total)

- a. Para el cubo diferencial de la figura, dibuje el estado de esfuerzos para  $\tau_{xx} = 10[\text{MPa}]$   $\tau_{yy} = -5[\text{MPa}]$   $\tau_{zz} = 0$   $\tau_{xy} = -4[\text{MPa}]$   $\tau_{xz} = -9[\text{MPa}]$   $\tau_{yz} = 8[\text{MPa}]$

(2 puntos)



- b. ¿Por qué para el tensor de esfuerzos se cumple  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ ? ¿Cómo se demuestra? (2 puntos)  
 c. ¿Qué significa decir que un material es 'homogéneo' en ecuaciones constitutivas? (2 puntos)  
 d. ¿En fatiga como se obtiene  $S'_n$ ? ¿Qué significa la recta de Goodman y para qué sirve? (4 puntos)

Formulario

Torsión  $T = \frac{\theta GJ}{L}$

Sección circular  $J = \frac{\pi D^4}{32}$

$\tau = \frac{Tr}{J}$

Sección rectangular  $J = k_2 ab^3$

$\tau = \frac{T}{k_1 ab^2}$   $b \leq a$

$a/b$	1	1.5	2	4	10	$\infty$
$k_1$	0.208	0.231	0.246	0.282	0.312	1/3
$k_2$	0.141	0.196	0.281	0.281	0.312	1/3

Flexión

Esfuerzo  $\sigma_x = -\frac{M(x)}{I_z} y$

Momento inercia de área y eje neutro

Caso general eje neutro  $\int_A y dA = 0$

momento inercia  $I_z = \int_A y^2 dA$

Sección rectangular  $I_z = \frac{ab^3}{12}$

Sección circular  $I_z = \frac{\pi}{4} r^4$

Eje paralelo al neutro  $I_z = I_z + \text{distancia}^2 \text{Area}$

Ecuación de la elástica

$\hat{y}$  : Deflexión vertical de la viga

$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI}$   $\frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI}$   $\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$   $\frac{d \hat{y}}{dx} \approx \theta(x)$

$\int \delta(x-a) dx = r(x-a)$   $\int r(x-a) dx = (x-a)r(x-a)$   $\int (x-a)r(x-a) dx = \frac{1}{2} (x-a)^2 r(x-a)$

$\int \frac{1}{2} (x-a)^2 r(x-a) dx = \frac{1}{6} (x-a)^3 r(x-a)$

Esfuerzos normal y de corte máximos

$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$   $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Esfuerzo de Von Mises

$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$

Ecuación para el pandeo

$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{w(x)}{EI}$  Solución:  $\hat{y}(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x\right) + c_3 x + c_4$

# Pauta examen

(1)

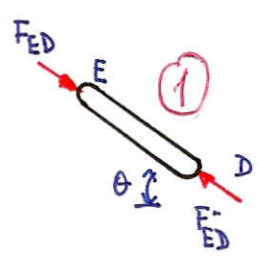
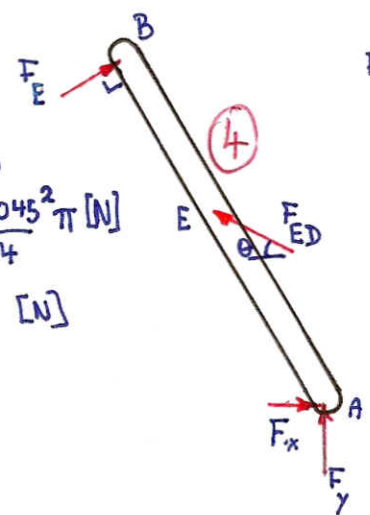
1) Diagramas de cuerpo libre de AB, DE y CDG

fuera émbolo

$$F_E = 550 \times \frac{0.045^2 \pi}{4} \text{ [N]}$$

$$= 0.8747 \text{ [N]}$$

(1)



Barra AB

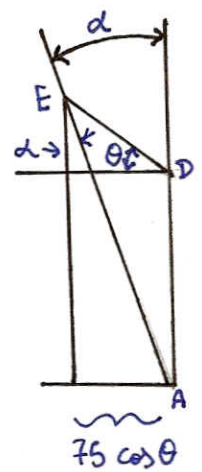
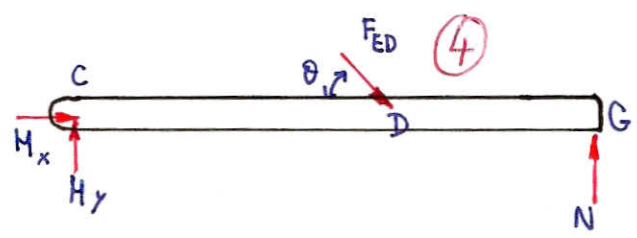
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow -F_E \times 200 + F_{ED} \cos \theta \times (75 + 75 \sin \theta) - F_{ED} \sin \theta \times 75 \times \cos \theta = 0$$

(\*) (2)

Barra CDG

(2)

$$(**) \sum M_D = 0 \Rightarrow N \times 250 - F_{ED} \sin \theta \times 100 = 0$$



$$\tan \alpha = \frac{75 \cos \theta}{75 + 75 \sin \theta}$$

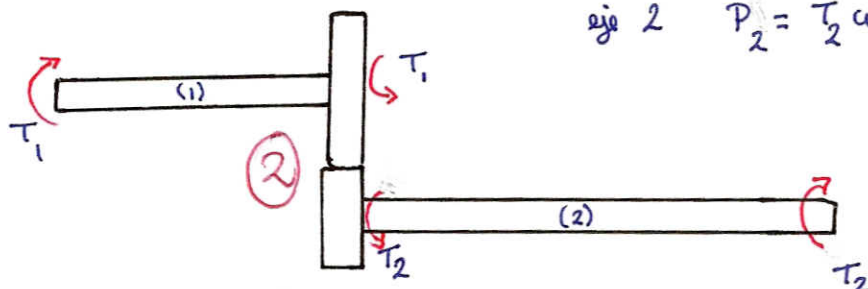
$$\Rightarrow \sin \theta = \left\{ \begin{matrix} -1 \\ 0.939693 \end{matrix} \right. \Leftarrow$$

$$(1) \Rightarrow \theta \approx 70^\circ$$

Luego de (\*) se tiene  $F_{ED} = 6.81987 \text{ [N]}$  (2)

y finalmente de (\*\*) se obtiene  $N = 2.56343 \text{ [N]}$  (3)

2)



$$\text{eje 1 } P_1 = T_1 \omega_1 = P \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{eje 2 } P_2 = T_2 \omega_2 \quad \text{pero } P_2 = P_1 = P \quad (1)$$

no hay pérdida

$$\omega_1 \frac{D_1}{2} = \omega_2 \frac{D_2}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_2 = \omega_1 \frac{D_1}{D_2} = 400 \text{ [rpm]}$$

$$(1) \quad \omega_2 = 41.89 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\omega_1 = 31.42 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{P}{\omega_1} = 31.83 \text{ [Nm]} \quad (1) \quad T_2 = \frac{P}{\omega_2} = 23.87 \text{ [Nm]} \quad (1)$$

$$\text{eje 1 } \tau = \frac{T_1}{k_1 a^3} \quad k_1 \approx 0.208 \Rightarrow \tau = \frac{T_1}{0.208 a^3} \quad (2)$$

$$\text{esfuerzo de corte } \tau_{adm} = \frac{\sigma_0}{2} \cdot \frac{1}{F.S.} = 113.3 \text{ [MPa]} \quad (1) \text{ luego m\u00ednimo "a" es tal que}$$

$$\tau = \tau_{adm} \Rightarrow \frac{T_1}{0.208 a^3} = 113.3 \text{ [MPa]} \Rightarrow a = 1.105 \times 10^{-2} \text{ [m]} \quad (1)$$

$$= 1.105 \text{ [cm]}$$

$$\text{eje 2 } \tau = \frac{T_2 r_{max}}{J_2} \quad (2) \quad r_{max} = \frac{d}{2} \quad J_2 = \frac{\pi d^4}{32} \text{ , m\u00ednimo "d" tal que } \tau = \tau_{adm}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2 \frac{d}{2}}{\frac{\pi d^4}{32}} = \frac{16}{\pi} \frac{T_2}{d^3} = 113.3 \text{ [MPa]} \Rightarrow d = 1.024 \times 10^{-2} \text{ [m]} \quad (1)$$

$$= 1.024 \text{ [cm]}$$

$$\text{\u00e1ngulo eje 1 } T_1 = \theta_1 \frac{G J_1}{L_1} \Rightarrow \theta_1 = \frac{T_1 L_1}{G J_1} \quad (1) \quad J_1 = k_2 a^4 = 0.141 \times a^4$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 0.1095 \text{ [rad]} \quad (1)$$

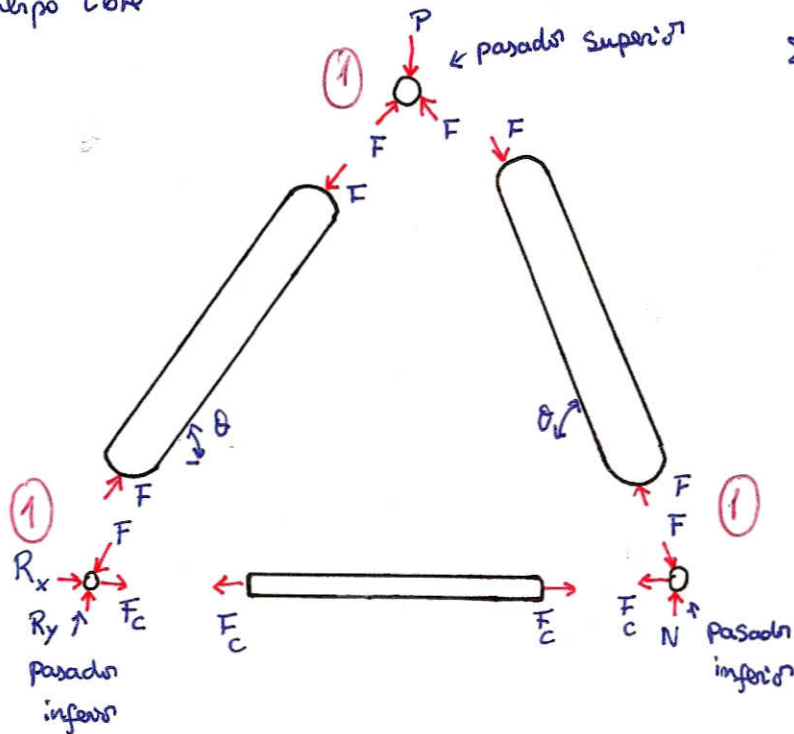
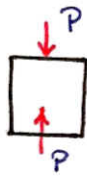
$$\text{\u00e1ngulo eje 2 en engranaje } \theta \quad \theta \frac{D_2}{2} = \theta_1 \frac{D_1}{2} \Rightarrow \theta = 0.146 \text{ [rad]} \quad (1)$$

$$\text{\u00e1ngulo tors\u00edon eje 2 } \theta_2 = \frac{T_2 L_2}{G J_2} = 0.2948 \text{ [rad]} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \text{\u00e1ngulo en zona polea} = \theta + \theta_2 = 0.4408 \text{ [rad]} \quad (2)$$



### 3) Diagramas cuerpo libre



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$P = 2F \sin \theta$$

$$\Rightarrow F = \frac{P}{2 \sin \theta} \quad (1)$$

$$\Sigma F_x = 0$$

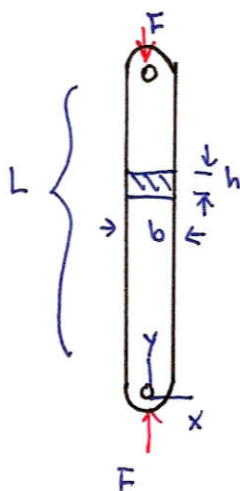
$$\Rightarrow F_c = F \cos \theta \quad (1)$$

• esfuerzo tracción cable =  $\frac{F_c}{A_{\text{cable}}} \quad (1)$

$$\sigma_{\text{adm}} = \frac{\sigma_0}{F.S.} \Rightarrow F_{c \text{ max}} = \frac{\sigma_0}{F.S.} A_{\text{cable}}$$

$$\Rightarrow F_{c \text{ max}} = 17671.46 \text{ [N]} \Rightarrow F_{\text{max}} = 68277.27 \text{ [N]} \Rightarrow P_{\text{max}} = 131901.56 \text{ [N]} \quad (1)$$

- las barras son largas en relación a su sección (b, h), luego si "fallan" sería por pandeo: La fuerza F y las dimensiones son las mismas  $\Rightarrow$  se puede estudiar solo una barra



• Pandeo plano x-y

$$\hat{y}(x) = C_1 \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) + C_2 \cos \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) + C_3 x + C_4$$

condiciones de borde

$$\hat{y}(0) = 0$$

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(0) = 0$$

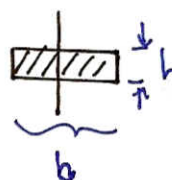
$$\hat{y}(L) = 0$$

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(L) = 0$$

1ª carga crítica

$$\sqrt{\frac{F_{c1}}{EI}} L = \pi \quad (1) \Rightarrow F_{c1} = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 EI$$

I  $\Rightarrow$



$$I = \frac{b h^3}{12} \quad (1) \Rightarrow F_{c1} = 293003.88 \text{ [N]}$$

$$\Rightarrow P_{c1} = 566040.03 \text{ [N]} \quad (1)$$

• Pandeo plano y-z. Condiciones de borde

$$\hat{y}(0) = 0$$

(1)

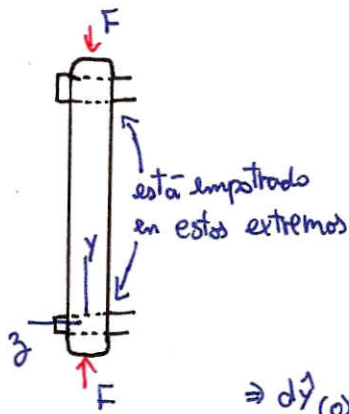
$$\frac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0$$

$$\hat{y}(L) = 0$$

(1)

$$\frac{d\hat{y}}{dx}(L) = 0$$

(4)



se tiene

$$\hat{y}(x) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_3 x + C_4$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx}(x) = C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) - C_2 \sqrt{\frac{F}{EI}} \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) + C_3$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0 \Rightarrow C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} + C_3 = 0$$

$$\hat{y}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0$$

$\Downarrow$

$$C_3 = -C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}}$$

$$\Downarrow$$
  

$$C_4 = -C_2$$

$$\hat{y}(L) = 0 \Leftrightarrow C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) - C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} L - C_2 = 0$$

$$\frac{d\hat{y}}{dx}(L) = 0 \Leftrightarrow C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) - C_2 \sqrt{\frac{F}{EI}} \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) - C_1 \sqrt{\frac{F}{EI}} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) - \sqrt{\frac{F}{EI}} L & \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) - 1 \\ \sqrt{\frac{F}{EI}} \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) - \sqrt{\frac{F}{EI}} & -\sqrt{\frac{F}{EI}} \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} L\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

solución no trivial si el determinante de esta matriz es cero  $\Rightarrow$  Fortico

sea  $\alpha = \sqrt{\frac{F}{EI}}$ ,  $\det(\text{matriz}) = 0 \Leftrightarrow (\sin(\alpha L) - \alpha L)(-\alpha \sin(\alpha L))$

$$- (\cos(\alpha L) - 1)(\alpha \cos(\alpha L) - \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha \sin^2(\alpha L) + \alpha^2 L \sin(\alpha L) - \alpha \cos^2(\alpha L) + \alpha \cos(\alpha L) + \alpha \cos(\alpha L) - \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 L \sin(\alpha L) + 2\alpha \cos(\alpha L) - \alpha - \alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha L \sin(\alpha L) + 2 \cos(\alpha L) - 2 = 0$$

solución trivial  $\alpha = 0$

1ª solución no trivial

$$\alpha_{cr} = 6.2831853 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} = \alpha_{cr}$$

pero  $I = \frac{bh^3}{12}$

$$\Rightarrow F_{cr} = 105481.397 \text{ [N]}$$

$$\Rightarrow P_{cr} = 203774.411 \text{ [N]} \quad (1)$$

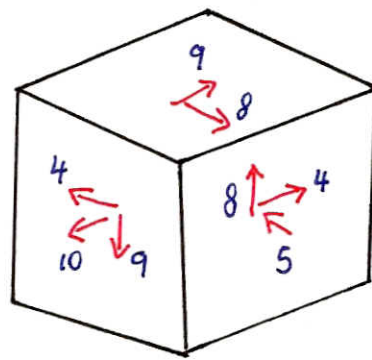
$$P_{adm} \text{ pandeo plano } x-y \quad P_{adm} = \frac{566040.03}{F.S} = 283020.015 \text{ [N]} \quad (1) \quad (5)$$

$$\text{plano } y-z \quad P_{adm} = \frac{203774.411}{F.S} = 101887.206 \text{ [N]} \quad (1)$$

Comparando las cargas admisibles  $P$  para los tres "tallos" en tracción para el cable, y los dos modos en pandeo para las barras

$$\Rightarrow P_{adm} = 101887.206 \text{ [N]} \quad (1)$$

4) a.

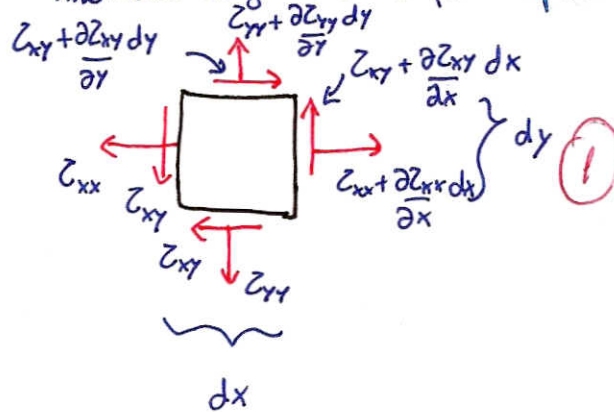


3  
x y

(2)

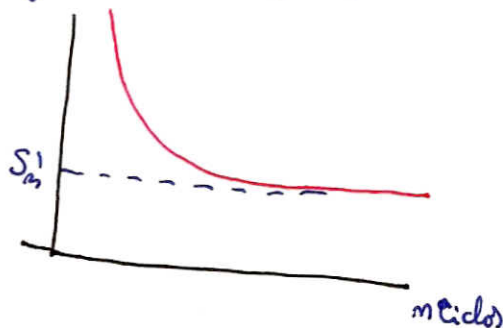
(6)

b. Se tiene  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  debido a como resultado de equilibrio al momento angular o torque para un cuadrado diferencial (1)



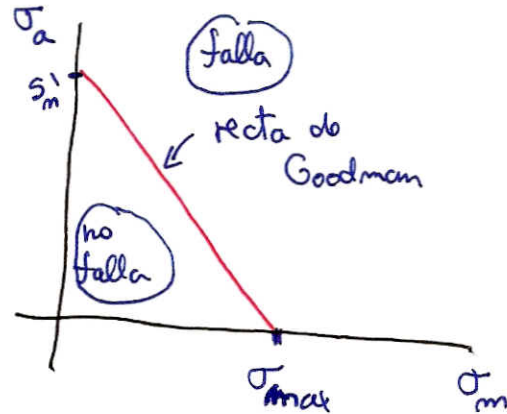
c. Decir que un material es homogéneo significa que sus propiedades mecánicas no dependen de la posición, es decir por ejemplo  $E$  y  $\nu$  son los mismos para cualquier posición de un cuerpo (2)

d. La resistencia a la fatiga  $S_m'$  se obtiene al hacer un gráfico de los esfuerzos necesarios para que una componente o probeta falle en fatiga en función del número de ciclos. A menor esfuerzo mayor es el número de ciclos. Para varios materiales hay un límite inferior para el cual el número de ciclos para la falla por fatiga tiende a infinito, a este límite se le denomina resistencia a la fatiga  $S_m'$  (1)





Cuando una componente está sometida no solo a esfuerzo alterno (7) sino además a una tensión media, la resistencia a la fatiga decrece si este esfuerzo de tracción medio aumenta. De experimento (1) con distintos esfuerzos alternantes y medios se obtuvo que la región segura en donde no hay falla por fatiga está mas o menos ubicada bajo una recta llamada recta de Goodman



La recta en el plano  $\sigma_m - \sigma_a$

(1)

↑ ↑  
esfuerzo medio esfuerzo alterno

Va desde  $S'_m$  a  $\sigma_{max}$

↑  
esfuerzo último o de rotura