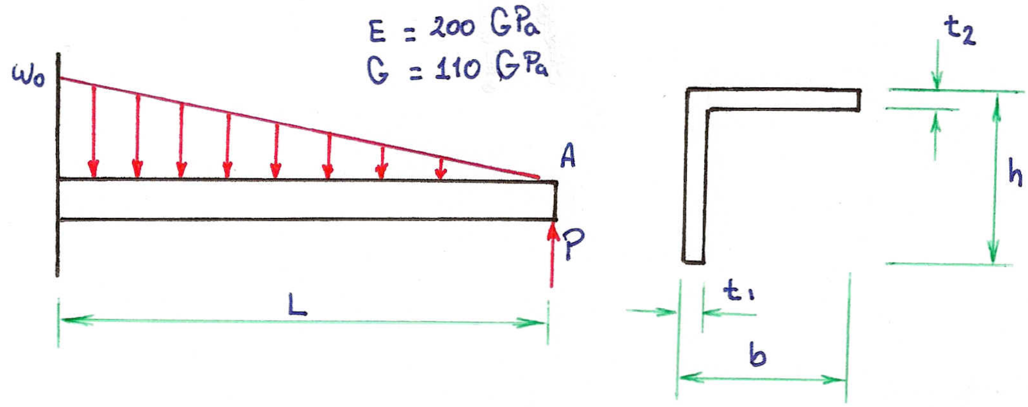
Control 3. Resistencia de Materiales ME3202-1, ME46A-2

11/11/2009

Profesor: Roger Bustamante

1) Usando Castigliano determine la fuerza puntual ***P*** de modo que el desplazamiento en el punto ***A*** sea cero. Si ***L*** >> ***h***, ***b*** ¿es necesario considerar la energía por corte? (20 puntos)



Datos:

$w_0 = 2000 \frac{N}{m}$

$L = 2$ m

$h = 8$ cm

$b = 10$ cm

$t_1 = 1$ cm

$t_2 = 8$ mm

2) La figura muestra un eje se sección circular unido a una polea maciza y empotrado en el otro extremo. El eje no tiene peso, pero la polea pesa ***P*** la cual además está sometida a dos tensiones T_1, T_2 que provienen de la interacción con una correa. (40 puntos)

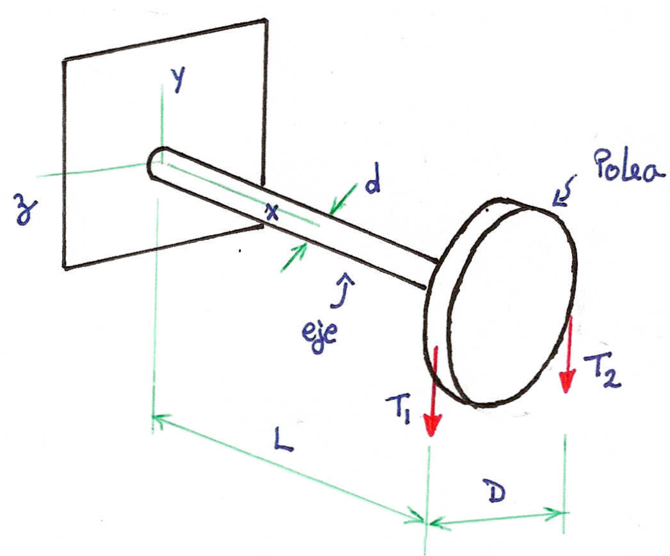
a) Determine la zona ***x*** en la cual se producirían las máximas fuerzas internas, momentos internos y torques en el eje. Justifique claramente dibujando dichas fuerzas, momentos etc. en función de ***x***. (5 puntos)

b) Para la zona escogida en a), elija dos puntos en la periferia del eje que Ud. considere estarán sometidos a mayores esfuerzos, y de una lista detallada de los tipos de esfuerzos que se generarían en esos puntos causados por las fuerzas internas calculadas en a). (10 puntos)

c) Para los dos puntos escogidos en b), determine cada unos de los esfuerzos mencionados allí. (10 puntos)

d) Usando el círculo de Mohr calcule los esfuerzos normales máximos en los dos puntos escogidos. (10 puntos)

e) Usando un factor de seguridad ***FS*** = 2.5 , para un acero con $\sigma_e = 340$ [MPa], determine para los dos puntos si se produce o no falla con el criterio de Von Mises. (5 puntos)



Datos :

E = 200 GPa

G = 110 GPa

L = 30 cm

T_1 = 3000 N

T_2 = 1000 N

d = 6 cm

D = 25 cm

P = 250 N

3) Dibuje los estados de esfuerzos para cuadrados diferenciales y además con la ayuda del círculo de Mohr determine los esfuerzos normales máximos y mínimos para los dos casos siguientes (10 puntos):

a) $\sigma_x = -20$ [MPa] $\sigma_y = -20$ [MPa] $\tau_{xy} = 15$ [MPa]

b) $\sigma_x = 30$ [MPa] $\sigma_y = 0$ [MPa] $\tau_{xy} = -5$ [MPa]

Formulario

Torsión $T = \dfrac{\theta G J}{L}$ Sección circular $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$ $\tau = \dfrac{Tr}{J}$

Flexión

Esfuerzo $\sigma_x = -\dfrac{M(x)}{I_z} y$

2do momento de área: Sección rectangular $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$

Sección circular $I_z = \pi \dfrac{D^4}{64}$

Corte viga sección arbitraria

$$\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi dA$$

Energía de deformación

Flexión $U_f = \int_0^L \dfrac{1}{2EI} M(x)^2 dx$

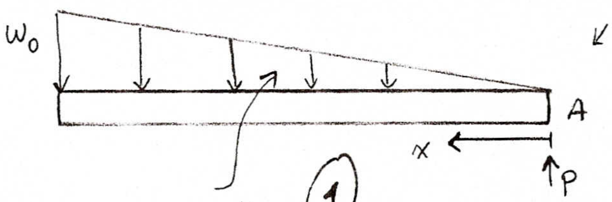
Corte (sección rectangular) $U_c = \dfrac{3}{5} \int_0^L \dfrac{1}{GA} V(x)^2 dx$ A: área de la sección

Esfuerzo de Von Mises

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

Pauta Control 3

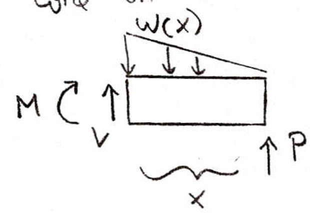
Como $L >> h, b$ no consideraremos el corte en el cálculo de la energía, solo se considerará flexión



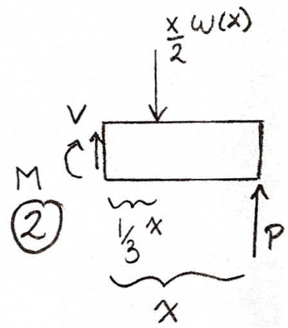
Por simplicidad conviene poner el eje desde la derecha

$W(x) = W_0 \frac{x}{L}$ (1)

Corte en x



es equivalente a



$$\Rightarrow \quad M(x) = Px - \frac{1}{3}x \cdot \frac{x}{2} w(x)$$

$$= Px - w_0 \frac{x^3}{6L} \quad (3)$$

Energía $\quad \mathcal{U}_f = \int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx \quad (2)$

desplazamiento en A $\quad \delta_A = \frac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial P} = \int_0^L \frac{1}{EI} M(x) \frac{\partial M}{\partial P} dx \quad (2)$

(1) $\frac{\partial M}{\partial P} = x$, en nuestro caso E, I son constantes

$$\Rightarrow \delta_A = \underbrace{\frac{1}{EI} \int_0^L \left(Px - \frac{w_0}{6L} x^3 \right) x \, dx}_{\int_0^L Px^2 - \frac{w_0 x^4}{6L} dx \; = \; \frac{PL^3}{6} - \frac{w_0 L^{\cancel{5}\,4}}{5 \times 6 \cancel{L}}} \quad (2)$$

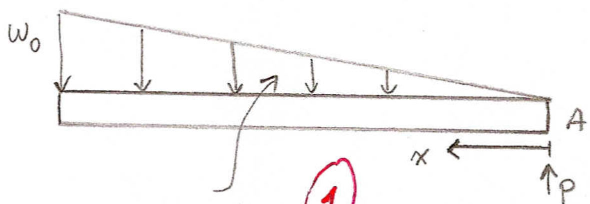
$$\Rightarrow \delta_A = \frac{1}{EI}\left[\frac{PL^3}{6} - \frac{w_0 L^4}{30}\right] \quad (2)$$

, luego se quiere el desplazamiento en A igual a cero, de modo que $\delta_A = 0$ (2)

$$\Rightarrow \frac{PL^3}{6} = \frac{w_0 L^4}{30} \Rightarrow P = \frac{w_0 L}{5} = 800 \text{ N} \quad (2)$$

Pauta Control 3

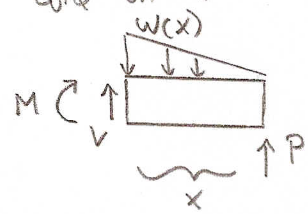
1) Como $L >> h, b$ no consideraremos el corte en el cálculo de la energía, solo se considerará flexión



por simplicidad conviene poner el eje desde la derecha

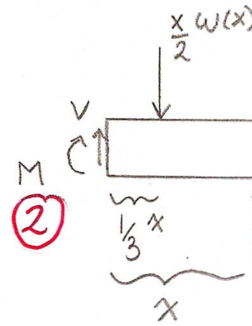
$w(x) = w_0 \dfrac{x}{L}$ 1

Corte en x



1

es equivalente a



2

$$\Rightarrow \quad M(x) = Px - \frac{1}{3} x \cdot \frac{x}{2} w(x)$$

$$= Px - w_0 \frac{x^3}{6L} \quad 3$$

Energía $\quad \mathcal{U}_f = \displaystyle\int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx \quad 2$

desplazamiento en A $\quad \delta_A = \dfrac{\partial \mathcal{U}_f}{\partial P} = \displaystyle\int_0^L \frac{1}{EI} M(x) \frac{\partial M}{\partial P} dx \quad 2$

1 $\quad \dfrac{\partial M}{\partial P} = x$, en nuestro caso E, I son constantes

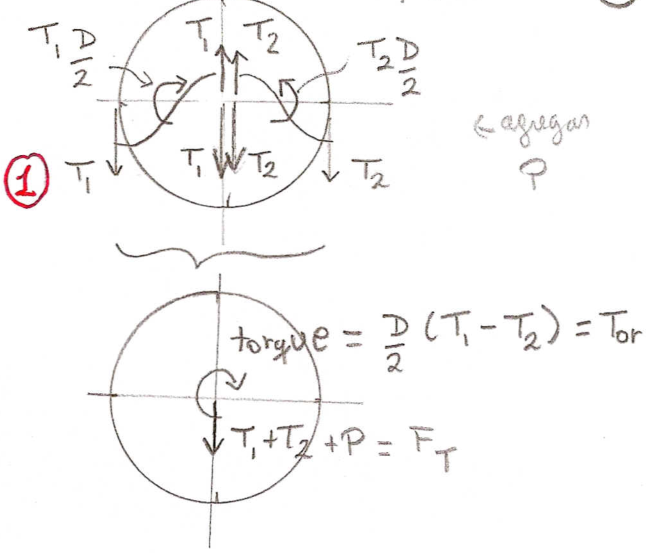
$$\Rightarrow \delta_A = \frac{1}{EI} \underbrace{\int_0^L \left(Px - \frac{w_0}{6L} x^3 \right) x \, dx}_{\int_0^L Px^2 - \frac{w_0 x^4}{6L} dx \; = \; \frac{PL^3}{3} - \frac{w_0 L^{\cancel{5}\,4}}{5 \times 6 \cancel{L}}} \quad 2$$

2 $\quad \Rightarrow \delta_A = \dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{PL^3}{3} - \dfrac{w_0 L^4}{30}\right]$, luego se quiere el desplazamiento en A igual a cero, de modo que $\delta_A = 0$ 2

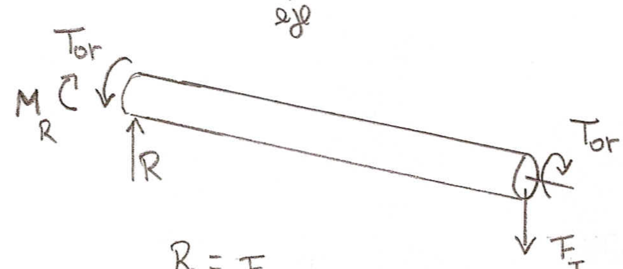
$$\Rightarrow \frac{PL^3}{3} = \frac{w_0 L^4}{30} \Rightarrow P = \frac{w_0 L}{10} = 400 \text{ N} \quad 2$$

2) a) Primero se traslada T_1 y T_2

Vista frontal ②



← agregar P

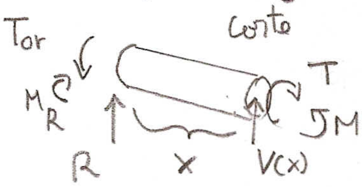


①

$R = F_T$

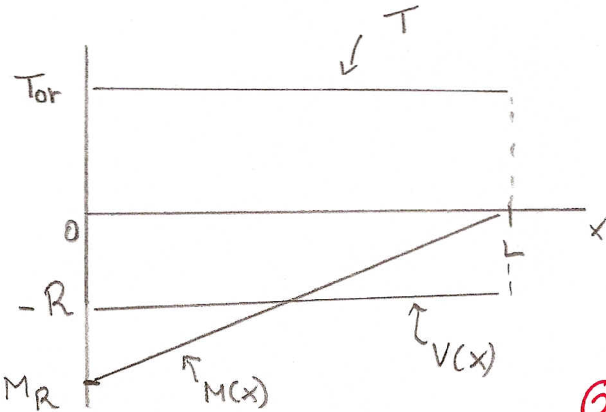
$M_R = -F_T L$

Luego diagramas de $V(x)$, $M(x)$ y torque T



$T = T_{or}$ $\quad V = -R$

$$\begin{aligned} M &= M_R + Rx \\ &= -F_T L + F_T x \\ &= F_T(x - L) \end{aligned}$$



Luego T y V son los mismos en todas partes, mientras que $M(x)$ en valor absoluto es máximo en $x = 0$

② $\Rightarrow x = 0$ es la zona a calcular los esfuerzos

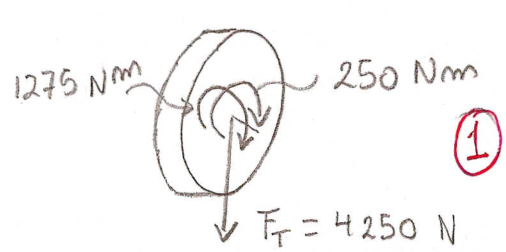
$V(x) = -4250$ N

$M_R = -1275$ Nm ①

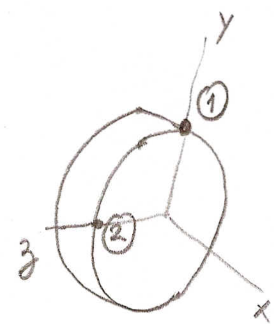
$T = 250$ Nm

$x = 0$

b)



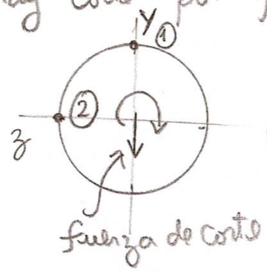
①



Se escogerá los puntos ① y ②

②

Punto 1
- Corte por torsión 250 Nm 1
- Tracción por flexión causada por 1275 Nm 1
- No hay corte por fuerza de corte de 4250 N



← vista frontal eje sección 1

1

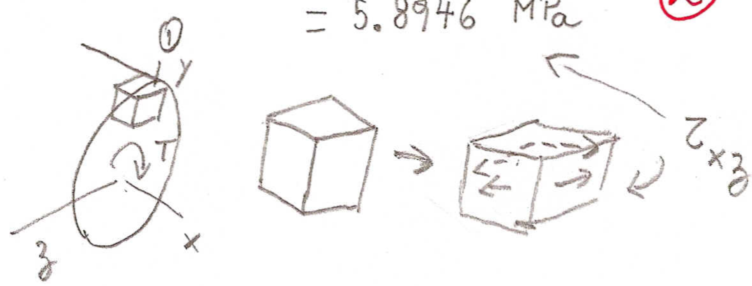
Punto 2
- Corte por torsión 250 Nm 1
- No hay ni tracción ni compresión por la flexión de 1275 Nm, pues 2 está en su eje neutro 1
- Corte por fuerza de corte de 4250 N 1

c) Punto 1 · Corte por torsión 250 Nm

$$\tau = \frac{T r}{J} \quad \text{aquí} \quad r = \frac{d}{2} \quad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

2

$$= 5.8946 \text{ MPa}$$



(negativo) 1

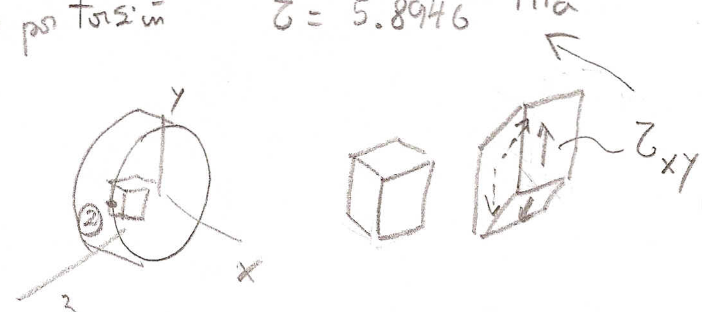
- Tracción por flexión ↙ el signo ya se incluye

$$\sigma_x = \frac{M}{I_z} y \quad \text{aquí} \quad M = 1275 \text{ Nm}$$

$$y = \frac{d}{2} \quad I_z = \frac{\pi d^4}{64} = 6.3617 \times 10^{-7} \text{ m}^4$$

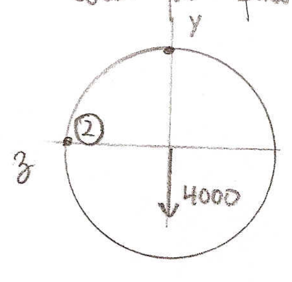
$$\Rightarrow \sigma_x = 60.1254 \text{ MPa}$$ 2

Punto 2 · Corte por torsión $\tau = 5.8946$ MPa



(positivo) 1

- Corte por fuerza de corte de 4000 N



$$\tau = \frac{V}{It}\int^{c} \xi \, dA$$

y → en este caso $=0$

τ_{xy} negativo

2

$t = d$

$dA = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \xi^2}\, d\xi$

$c = d/2$ $\quad I = \frac{\pi d^4}{64}$

$$\tau_{xy} = -\frac{4250}{I\,d} \underbrace{\int_0^{d/2} 2\xi\sqrt{\frac{d^2}{4} - \xi^2}\, d\xi}_{}$$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{d^2}{4} - \xi^2\right)^{3/2}\Bigg|_0^{d/2} = \frac{2}{3}\left(\frac{d^2}{4}\right)^{3/2}$$

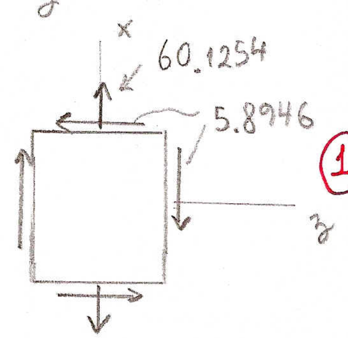
$\Rightarrow \tau_{xy} = -2.00418$ MPa 2

d)

Estado de esfuerzos punto 1

1 $\underbrace{\left.\begin{matrix} \sigma_x = 60.1254 \\ \tau_{xz} = -5.8946 \end{matrix}\right\}}_{}$ plano xz

$\sigma_z = 0$



1

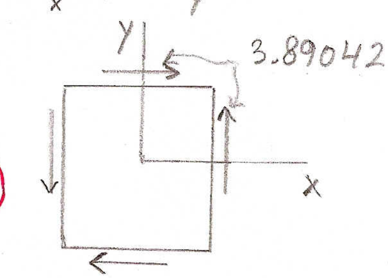
Estado de esfuerzos punto 2

plano xy $\underbrace{\left\{\begin{matrix} \text{Esfuerzo normal} = 0 \\ \tau_{xy} = 5.8946 - 2.00418 \\ = 3.89042 \text{ MPa} \end{matrix}\right.}_{}$

1

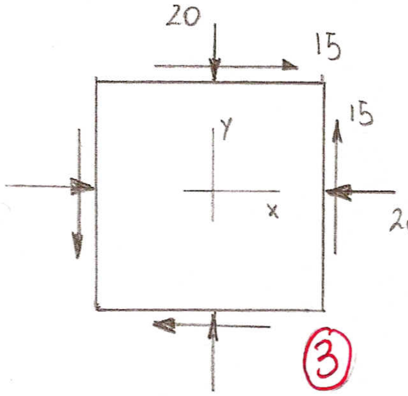
$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0$

1



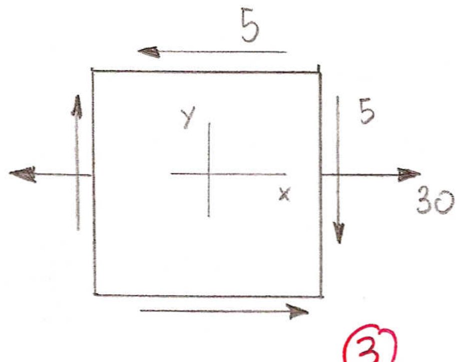
3)

a)

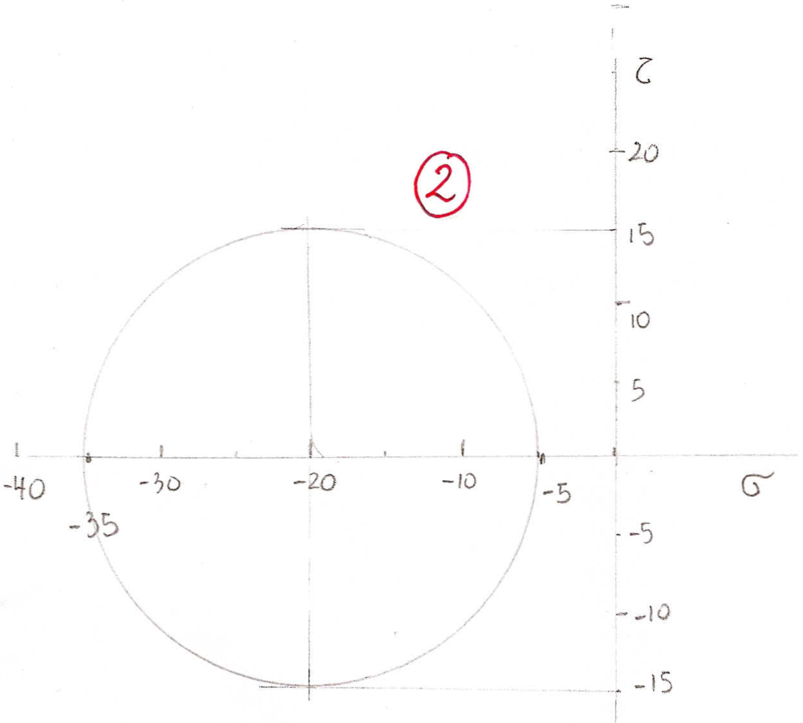


3

b)



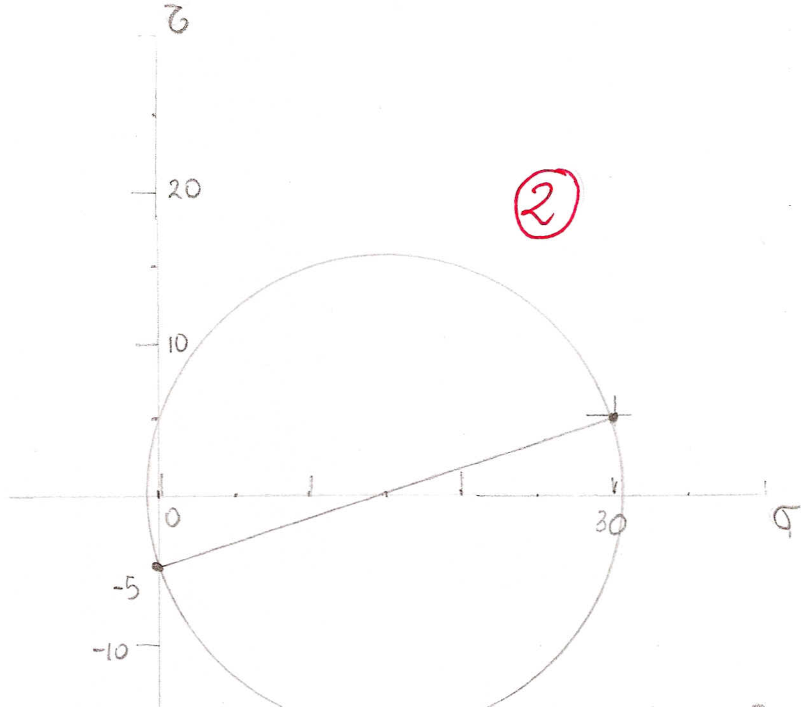
3



2

$\sigma_1 = -5$ MPa

$\sigma_2 = -35$ MPa

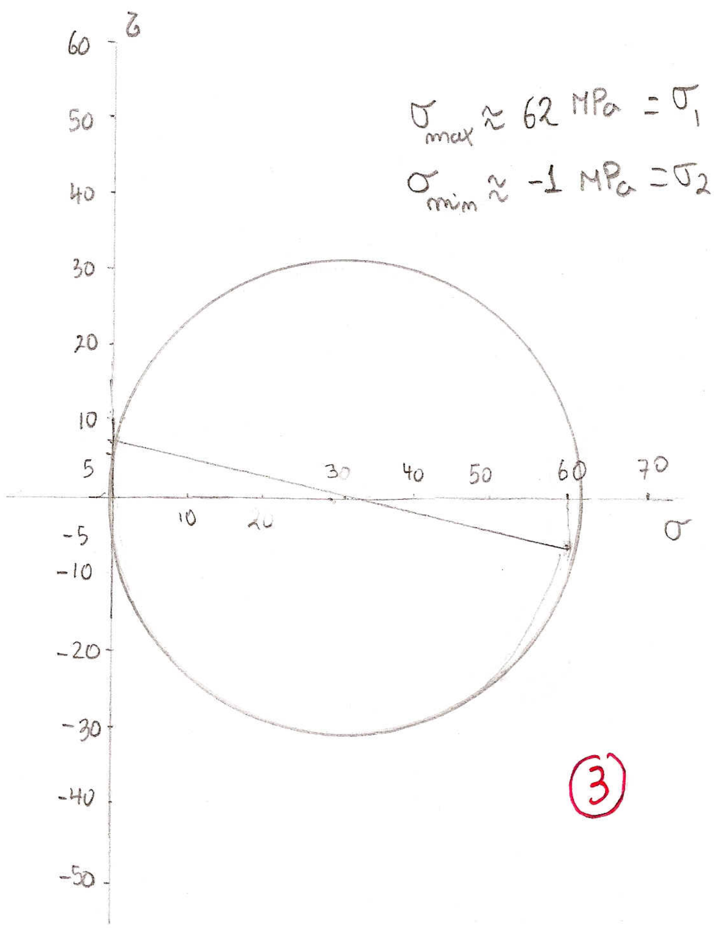


2

$\sigma_1 = 30.5$ MPa

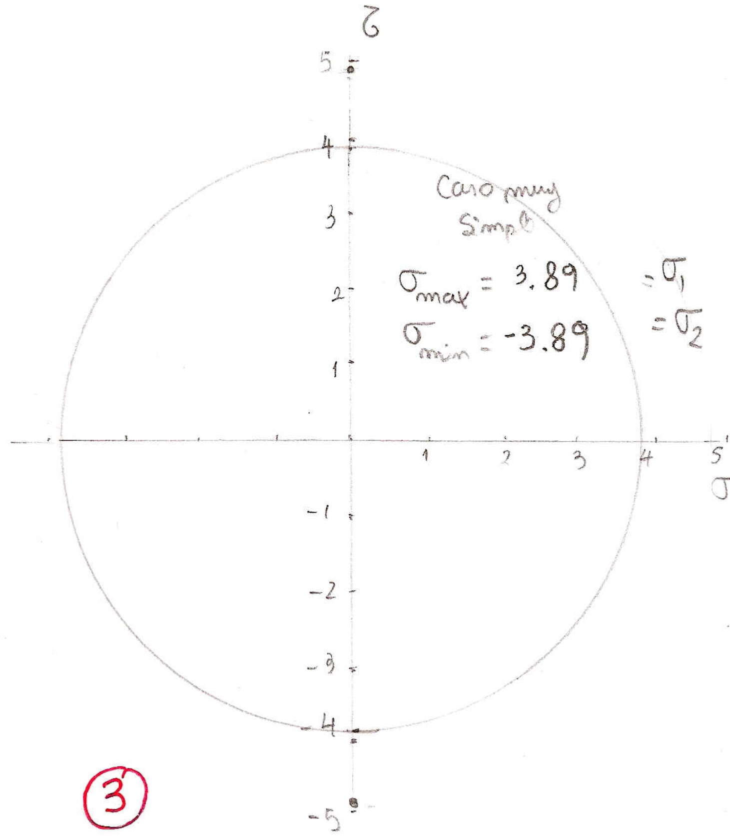
$\sigma_2 = -1$ MPa

1



3

2 5



3

e

Caso 1

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

$$= 62.506 \text{ MPa}$$

2

Caso 2

$$\sigma_{VM} = 6.7377 \text{ MPa}$$

1

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_0}{F.S.} = 136 \text{ MPa}$$

1

$\Rightarrow$ no falla ni en 2 ni en 1

1