Control 3. Resistencia de Materiales ME3202
1er semestre 2011

Roger Bustamante Plaza

1. La viga de sección rectangular ABC de la Figura 1 está bajo el efecto de una carga vertical P en C y está empotrada en A. La sección se muestra en la parte inferior de la figura. (20 puntos)

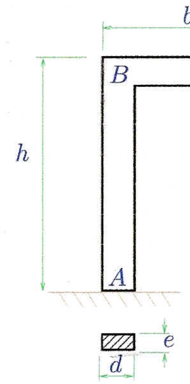


Figura 1: Viga doblada.

Usando Castigliano:

- Determine la deflexión vertical δ_y en C
- Determine la deflexión horizontal δ_x en C.
- Determine el ángulo de rotación en C

2. La viga de sección T mostrada en la Figura 2 está empotrada en un extremo y en el otro bajo el efecto de una fuerza puntual F. La sección se muestra en el lado derecho.

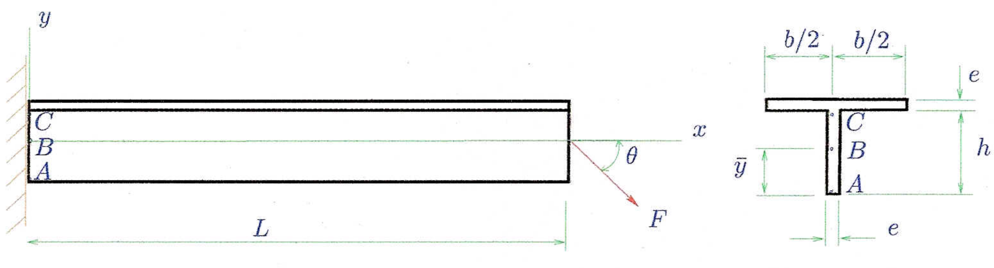


Figura 2: Viga T empotrada.

Para esta viga determine los estados de esfuerzos en los puntos A, B y C y también los esfuerzos principales. ¿Cual es la carga máxima F que se puede aplicar para que no falle

en cualquiera de estos tres puntos si la viga está hecha de un acero de bajo carbono con $\sigma_o = 340$MPa usando el criterio de Von Mises y un factor de seguridad $FS = 2.5$?
(35 puntos)

Datos: $L = 2$m, $h = 20$cm, $b = 15$cm, $e = 1$cm, $\theta = 50°$.

3. La placa delgada mostrada en la Figura 3 está formada por dos placas triangulares soldadas. La placa está sometida a un esfuerzo de tracción de 150MPa y a un esfuerzo de compresión

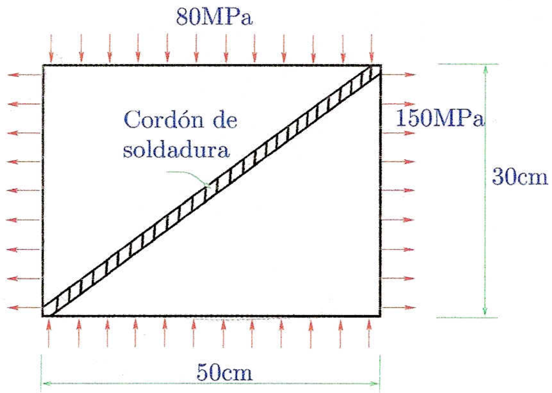


Figura 3: Placas soldadas.

de 80MPa.

Usando el circulo de Mohr determine el esfuerzo normal σ_W que actúa en sentido perpendicular al cordón de soldadura y el esfuerzo de corte τ_W que actúa paralelo al cordón.

Si el cordón de soldadura está hecho de un material con esfuerzo de fluencia $\sigma_o = 300$MPa, determine si falla o no con el criterio del esfuerzo de corte máximo con un $FS = 1.5$.
(15 puntos)

Formulario

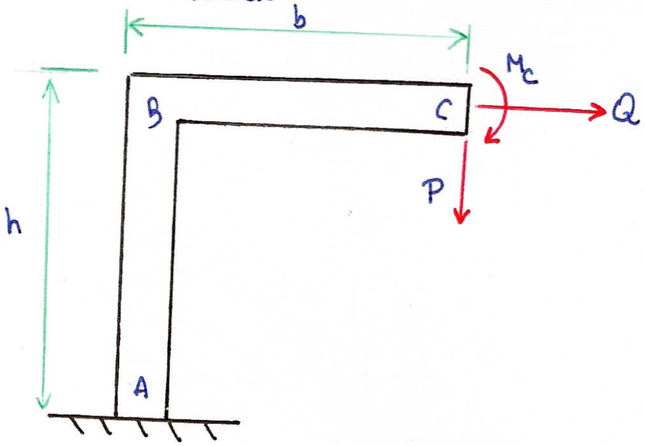
- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{Tr}{J}$
- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' \, dA$. Momento de inercia $I_z = \int_A y^2 \, dA$. Segundo momento área sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$; sección circular $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$. Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$.
- Corte sección arbitraria: $\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi \, dA$. Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} dx$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} dx$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.

Pauta control

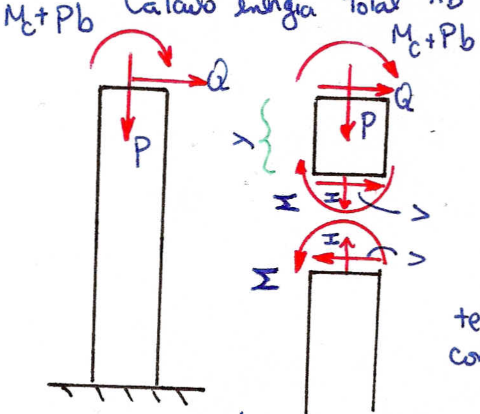
(1) δ_y se puede obtener calculando la energía total y derivándola en P

δ_x y θ se pueden obtener agregando una carga horizontal Q

ángulo de rotación — y un momento puro M_c



Cálculo energía total AB



$$\Rightarrow H = -P \quad (1)$$

$$M = -M_c - Pb - Qy \quad (1)$$

$$V = -Q \quad (1)$$

$$U_{T_{AB}} = \int_0^h \frac{1}{2E}\frac{H^2}{A}\,dy = \frac{P^2 h}{2EA} \qquad A = ed \quad (1)$$

tensión compresión

$$U_{F_{AB}} = \int_0^h \frac{1}{2E}\frac{M(y)^2}{I_z}\,dy = \int_0^h \frac{1}{2EI_z}\underbrace{(M_c + bP + Qy)^2}_{M_c^2+b^2P^2+Q^2y^2+2M_cbP+2M_cQy+2bPQy}\,dy$$

flexión

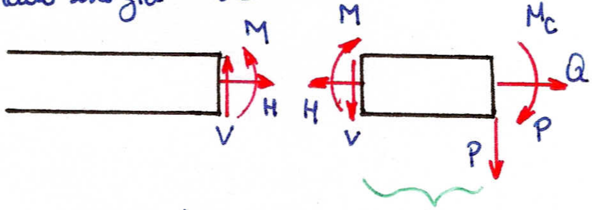
$$= \frac{1}{2EI_z}\left(M_c^2h + b^2P^2h + \frac{Q^2h^3}{3} + 2M_cbPh + M_cQh^2 + bPQh^2\right) \quad (2)$$

donde $I_z = \dfrac{ed^3}{12}$

$$U_{c_{AB}} = \frac{3}{5}\int_0^h \frac{V^2}{GA}\,dy = \frac{3}{5}\frac{Q^2 h}{GA} \quad 1$$

corte viga rectangular

Cálculo energía BC



$$\Rightarrow H = Q \quad 1$$
$$V = -P \quad 1$$
$$M = -M_c - Px \quad 1$$

$$\Rightarrow U_{T_{BC}} = \int_0^b \frac{1}{2E}\frac{H^2}{A}\,dx = \frac{Q^2 b}{2EA} \quad 1$$

$$U_{F_{BC}} = \int_0^b \frac{1}{2E}\frac{M(x)^2}{I_z}\,dx = \int_0^b \frac{1}{2EI_z}\underbrace{(M_c + Px)^2}_{M_c^2 + 2M_cPx + P^2x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2EI_z}\left(M_c^2 b + M_c P b^2 + \frac{P^2 b^3}{3}\right) \quad 2$$

$$U_{c_{BC}} = \frac{3}{5}\int_0^b \frac{V^2}{GA}\,dx = \frac{3}{5}\frac{P^2 b}{GA} \quad 1$$

Luego la energía total acumulada para toda la viga U_{Total} es

$$U_{Total} = \frac{P^2 h}{2EA} + \frac{1}{2EI_z}\left(M_c^2 h + b^2P^2h + \frac{Q^2h^3}{3} + 2M_cbPh + M_cQh^2 + bPQh^2\right)$$
$$+\frac{3}{5}\frac{Q^2h}{GA} + \frac{Q^2 b}{2EA} + \frac{1}{2EI_z}\left(M_c^2 b + M_c P b^2 + \frac{P^2b^3}{3}\right) + \frac{3}{5}\frac{P^2 b}{GA}$$

De modo que

$$\delta_y = \left.\frac{\partial U_{Total}}{\partial P}\right|_{M_c=0,\,Q=0} = \left[\frac{Ph}{EA} + \frac{1}{2EI_z}\left(2b^2Ph + 2M_cbh + bQh^2\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2EI_z}\left(M_c b^2 + 2Pb^3/3\right) + \frac{6}{5}\frac{Pb}{GA}\right]_{M_c=0,\,Q=0}$$

3) $\Rightarrow \delta_y = \dfrac{Ph}{EA} + \dfrac{b^2 Ph}{EI_z} + \dfrac{Pb^3}{3EI_z} + \dfrac{6Pb}{5GA}$

$$= \frac{P}{E}\left[\frac{h}{ed} + \frac{12b^2h}{ed^3} + \frac{4Pb^3}{ed^3}\right] + \frac{6Pb}{5Ged}$$ 2

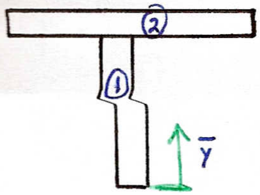
$$\delta_x = \left.\frac{\partial U_{Total}}{\partial Q}\right|_{M_c=0,\,Q=0} = \left[\frac{1}{2EI_z}\left(\frac{2Qh^3}{3} + M_c h^2 + bPh^2\right) + \frac{Qb}{EA} + \frac{6}{5}\frac{Qh}{GA}\right]_{M_c=0,\,Q=0}$$

$$= \frac{bPh^2}{2EI_z} = \frac{6bPh^2}{E\,ed^3}$$ 2

$$\theta = \left.\frac{\partial U_{total}}{\partial M_c}\right|_{M_c=0,\,Q=0} = \left[\frac{1}{2EI_z}\left(2M_c h + 2bPh + Qh^2\right) + \frac{1}{2EI_z}\left(2M_c b + Pb^2\right)\right]_{M_c=0,\,Q=0}$$

$$= \frac{bPh}{EI_z} + \frac{Pb^2}{2EI_z} = \frac{Pb}{Eed^3}\left(h + \frac{b}{2}\right)$$ 2

2. • Cálculo propiedades de área sección viga



$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{h}{2}\, eh + (h + e/2)\, eb}{eh + eb} = 14.5 \text{ cm}$$

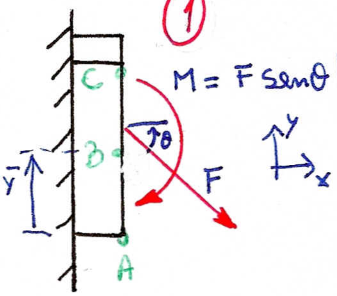
~~= 0.145 m~~ 1

$$I_{z_{total}} = I_1 + S_1^2 A_1 + I_2 + S_2^2 A_2$$

$$= \frac{eh^3}{12} + (\bar{y} - h/2)^2\, eh + \frac{be^3}{12} + \left(h + \frac{e}{2} - \bar{y}\right)^2 eb = 1.6129 \times 10^{-5}\, m^4$$ 1

• Fuerzas internas en zona de interés, esfuerzos

1



En punto A

- Esfuerzo normal (tracción) por carga axial 1
  $F \cos\theta$
- Podría haber esfuerzo de corte por $F \operatorname{sen}\theta$ pero punto A está en la parte inferior 1
  ⇒ en ese punto es igual a cero
- Esfuerzo normal (compresión) por momento
  $M = F \operatorname{sen}\theta\, L$ (flexión) 1

En Punto B

- Esfuerzo normal por $F\cos\theta$ 1
- Esfuerzo de corte por $F \operatorname{sen}\theta$ 1
- No hay esfuerzo normal por flexión pues B está ubicado en $\bar{y}$ 1

En punto C

1
- Esfuerzo normal por $F\cos\theta$
- Esfuerzo de corte por $F\operatorname{sen}\theta$ 1
- Esfuerzo normal (tracción) por flexión
  $M = F\operatorname{sen}\theta\, L$

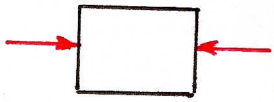
1

5) • Cálculo esfuerzos

Punto (A)

$$\sigma_x = \frac{F\cos\theta}{A_{total}} = \frac{F\cos\theta}{eh+eb} = 183.654\,F \quad 1$$

$$\sigma_x = -\frac{M\,\bar{y}}{I_z} = -\frac{F\,\text{sen}\theta\, L}{I_z}\bar{y} = -13773.507\,F \quad 2$$



$13589.853\,F = \sigma_x$

Compresión

Esfuerzos principales

$\sigma_1 = -13589.853\,F$ 1

$\sigma_2 = 0$

Punto (B)

$\sigma_x = 183.654\,F$

$$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t}\int_y^c \xi\, dA \qquad V = -F\,\text{sen}\theta \qquad t = e \quad 1$$

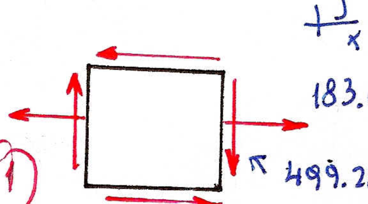
$$\underbrace{y=0}_{(B)} \qquad c = h+e-\bar{y}$$

$$dA = \begin{cases} e\, d\xi & -\bar{y} < \xi < h-\bar{y} \\ b\, d\xi & h-\bar{y} < \xi < h+e-\bar{y} \end{cases} \quad 2$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = -\frac{F\,\text{sen}\theta}{I_z e}\underbrace{\int_0^{h+e-\bar{y}} \xi\, dA}_{\int_0^{h-\bar{y}} \xi\, e\, d\xi + \int_{h-\bar{y}}^{h+e-\bar{y}} \xi\, b\, d\xi}$$

$$= -F\frac{\text{sen}\theta}{I_z e}\left[\frac{e}{2}(h-\bar{y})^2 + \frac{b}{2}\left\{(h+e-\bar{y})^2 - (h-\bar{y})^2\right\}\right] \quad 1$$

$$= -499.2896\,F \quad 1$$



$183.654\,F = \sigma_x$

$499.2896\,F = \tau_{xy}$

1

Esfuerzos principales

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{183.654\,F}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{183.654}{2}\right)^2 F^2 + 499.2896^2 F^2}$$

$$= F \begin{cases} 599.490 \\ -415.836 \end{cases} \qquad \Rightarrow \sigma_1 = 599.49\,F \qquad 2$$
$$\sigma_2 = -415.836\,F$$

Punto C El punto C se encuentra en 1 ⇒ corte $t = e$

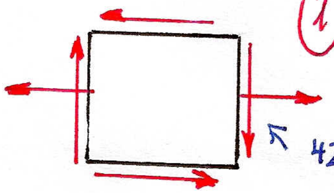
$$\sigma_x = 183.654\,F$$

$$\tau_{xy} = -\frac{F\,\mathrm{sen}\theta}{I_z\,e}\int_{h-\bar{y}}^{h+e-\bar{y}} \xi\, dA = -F\,\frac{\mathrm{sen}\theta\, b}{2\,I_z\,e}\left[(h+e-\bar{y})^2 - (h-\bar{y})^2\right] \qquad 1$$

$$= -427.4536\,F$$

$$\sigma_x = \frac{F\,\mathrm{sen}\theta\, L}{I_z}(h-\bar{y}) = 5224.43\,F \qquad 1$$

1



$5408.088\,F = \sigma_x$

$427.4536\,F = \tau_{xy}$

$$\sigma_m = \frac{5408.088\,F}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5408.088}{2}\right)^2 F^2 + 427.4536^2 F^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 5441.665\,F \qquad 2$$

$$\sigma_2 = -33.5773\,F$$

7) $\sigma_o = 340 \ MPa = 340 \times 10^6 \ Pa$ $\quad F.S = 2.5$

$\Rightarrow \sigma_{adm} = 136000000 \ Pa$ 1

Carga máxima

(A) $\sigma_{VM} = 13589.853 \ F \Rightarrow 13589.853 \ F = 136 * 10^6$

$\Rightarrow F = 10007.467 \ N$ 1

(B) $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{599.49^2 + 415.836^2 + 599.49 * 415.836} \ F$ 1

$= 884.07995 \ F$

$\Rightarrow 884.07995 F = 136 * 10^6$

$\Rightarrow F = 153832.24 \ N$ 1

(C) $\sigma_{VM} = \sqrt{5441.665^2 + 33.5773^2 + 5441.665 * 33.5773} \ F$

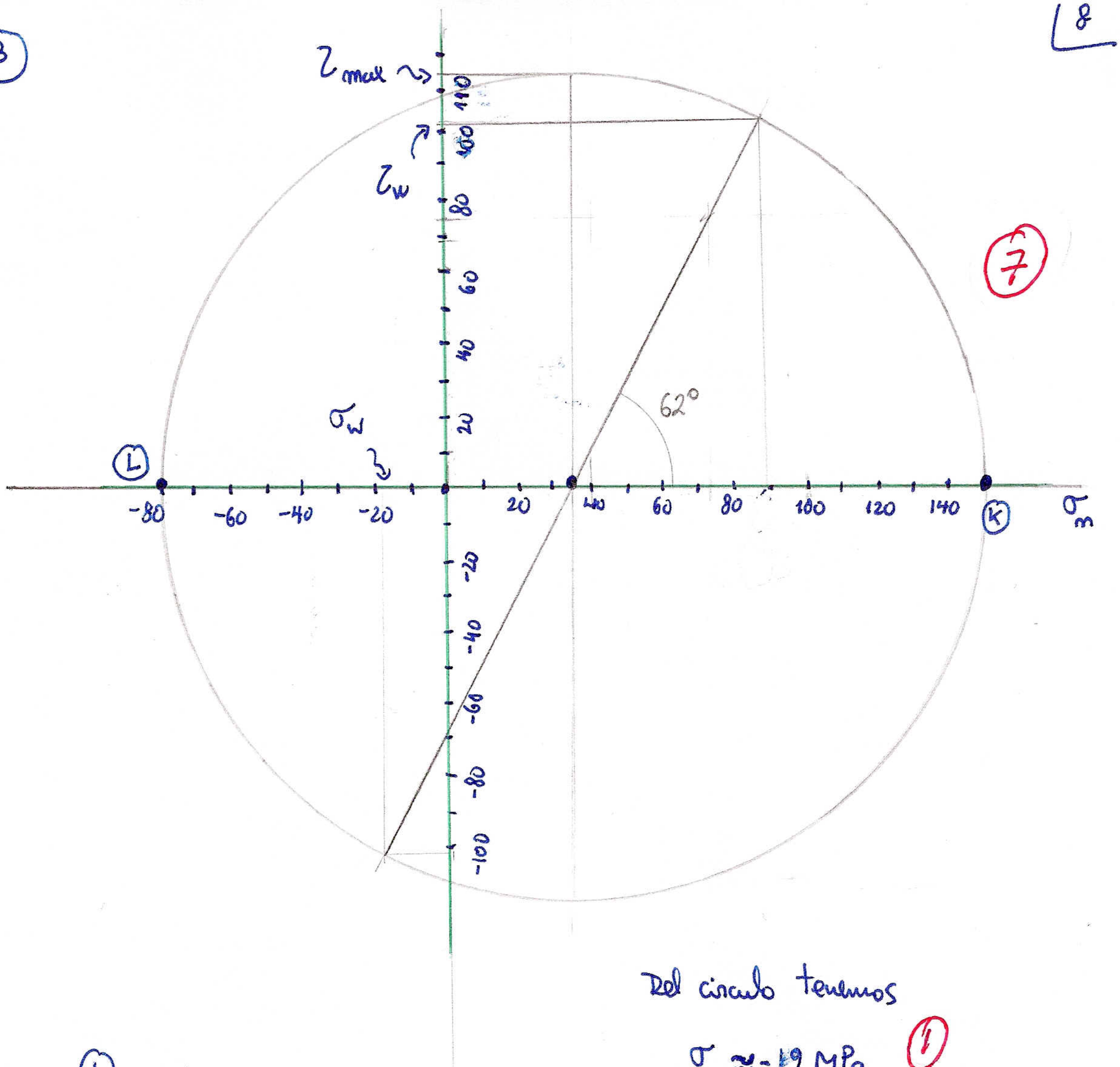
$= 5458.53 \ F \Rightarrow 5458.53 \ F = 136 * 10^6$

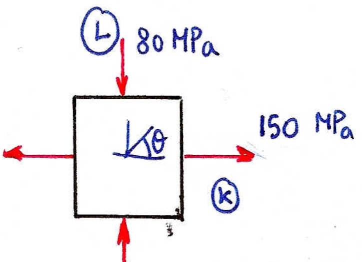
$\Rightarrow F = 24915.1278 \ N$ 1

$\Rightarrow$ Carga máxima $F = 10007.467 \ N$ 1

3

8





$\theta = \arctan\left(\frac{30}{50}\right) = 30.96^\circ$ 1

$\Rightarrow$ círculo de Mohr $\Rightarrow 61.92^\circ \approx 62^\circ$

1

Del círculo tenemos

$\sigma_w \approx -19$ MPa 1

$\tau_w \approx 101$ MPa 1

también $\tau_{max} \approx 115$ MPa 1

como $\sigma_0 = 300$ MPa

$\Rightarrow \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 150$ MPa 1

$\Rightarrow \tau_{adm} = \frac{\tau_0}{F.S.} = 100$ MPa

$\Rightarrow$ falla 2