Control 3, Resistencia de Materiales ME3202, ME46A
2do semestre 2010

Profesor: R. Bustamante

1. En la Figura 1 se tiene una viga de longitud L sometida a una fuerza uniforme w_o y una fuerza puntual P. Si se conoce el producto EI, usando el teorema de Castigliano determine el valor de la fuerza P de modo que en el punto B el desplazamiento vertical de la viga sea cero. (20 puntos)

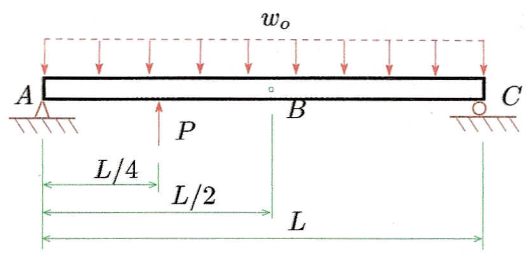


Figura 1: Viga sometida a fuerzas uniforme y puntual.

2. En la Figura 2 se tiene un eje que impulsa dos poleas. El eje recibe un torque T de un motor que no se muestra en esta figura. El eje está sobre dos soportes con rodamientos en los que podemos asumir no hay roce apreciable. En la posición mostrada en la figura para simplificar los cálculos se puede asumir que todo el sistema está en equilibrio.

   - Indique los tipos de esfuerzos que generan cada una de las fuerzas o momentos internos en (1), (2) que se muestran en vista frontal en la figura superior derecha para la sección $B-B$ del eje. Si el diámetro del eje es $D = 3$cm, determine y grafique en cuadrados diferenciales los estados de esfuerzos para los puntos (1), (2). (25 puntos)
   - Si se trabaja con un acero de bajo carbono para el eje con $\sigma_o = 100$MPa, usando el criterio de Von Mises, determine los factores de seguridad para los puntos (1) y (2), respectivamente. (10 puntos)

3. Una barra maciza de acero como la que se muestra en la Figura 3 tiene un diámetro de 30mm y actúa como separador en el sistema mostrado en dicha figura. Asuma que los cables son inextensibles. Considerando un factor de seguridad 1.7 determine la fuerza máxima que puede soportar el sistema. Se tiene $E = 190$GPa. (15 puntos)

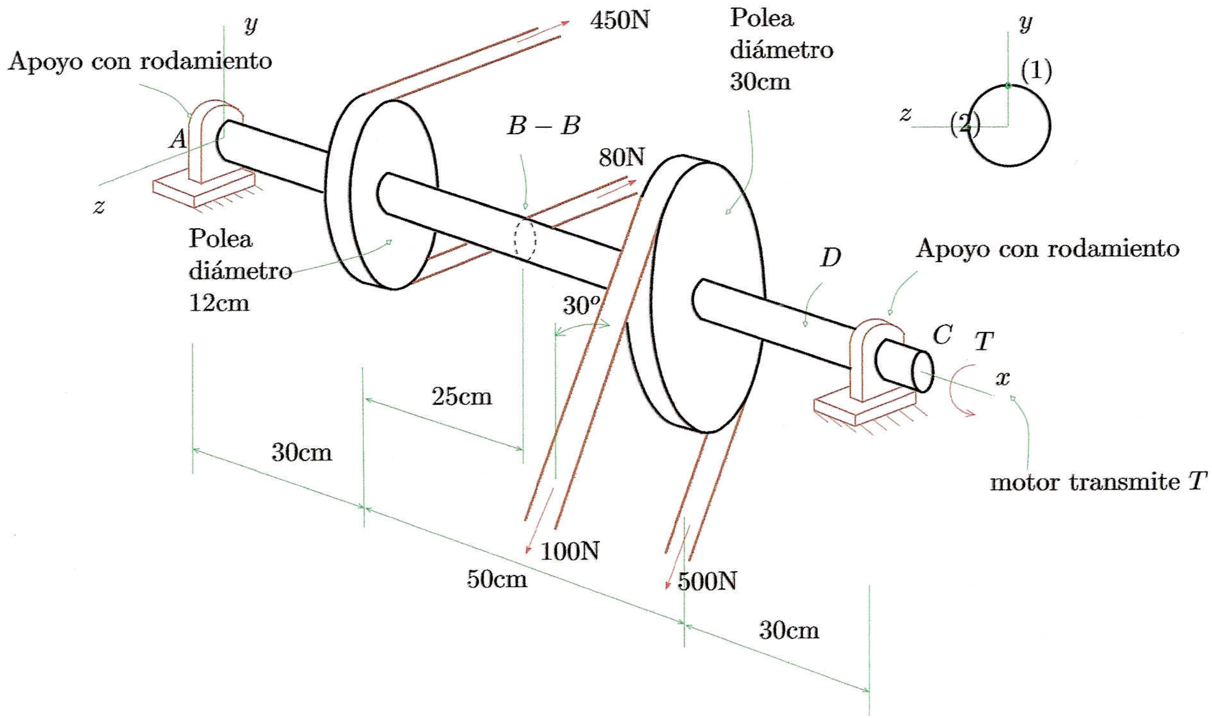


Figura 2: Eje con poleas.

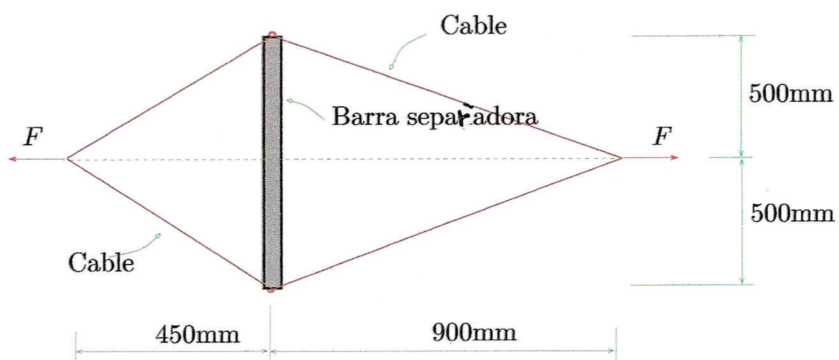


Figura 3: Separador con cables.

Formulario

- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{Tr}{J}$
- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' \, \mathrm{d}A$. Momento de inercia $I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A$. Segundo momento área sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$; sección circular $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$. Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$.
- Corte sección arbitraria: $\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi \, \mathrm{d}A$. Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} \mathrm{d}x$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} \mathrm{d}x$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} \, \mathrm{d}x$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} \, \mathrm{d}x$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.
- Pandeo: Ecuación caso general $\frac{\mathrm{d}^4 \hat{y}}{\mathrm{d}x^4} + \frac{P}{EI} \frac{\mathrm{d}^2 \hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{w(x)}{EI}$. Solución caso especial $w(x) = 0$, $\hat{y}(x) = c_1 \sin \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + c_2 \cos \left(\sqrt{\frac{P}{EI}} x \right) + c_3 x + c_4$.

  Ecuación caso columna excéntrica: $\frac{\mathrm{d}^2 \hat{y}}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI} \hat{y} = -\frac{Pe}{EI}$.

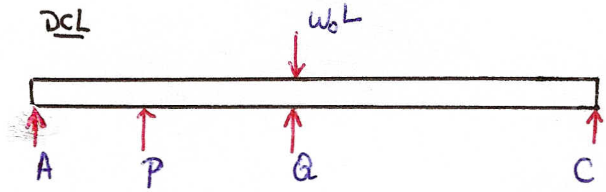
  Otras expresiones $\frac{\mathrm{d}^2 \hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta$.

Pauta Control

(1) Como respecto a la sección solo se conoce EI, y no hay fuerzas horizontales, solo consideraremos energía por flexión

$$U_T = \int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx$$

DCL



• Cálculo reacciones

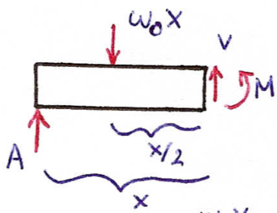
$$\sum_A M_z = 0 \Leftrightarrow \quad CL + Q\frac{L}{2} + P\frac{L}{4} = w_0\frac{L^2}{2} \Rightarrow \quad C = w_0\frac{L}{2} - \frac{Q}{2} - \frac{P}{4} \quad 1$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow \quad A + P + Q + C = w_0 L \Rightarrow A = w_0 L - P - Q - C$$

$$\Rightarrow \quad A = w_0\frac{L}{2} - \frac{3P}{4} - \frac{Q}{2} \quad 1$$

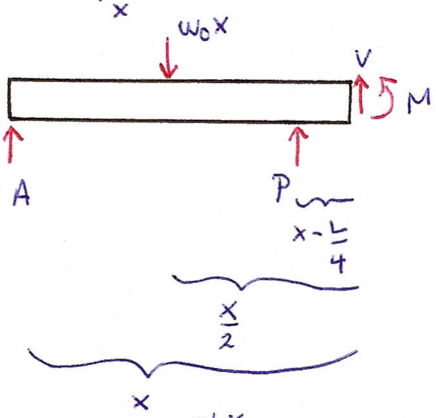
• Cálculo M(x)

$0 < x < L/4$



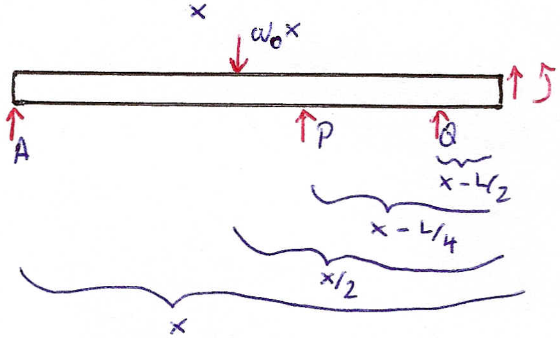
$$\Rightarrow M(x) = Ax - \frac{w_0 x^2}{2} \quad 1$$

$\frac{L}{4} < x < \frac{L}{2}$



$$\Rightarrow M(x) = Ax - \frac{w_0 x^2}{2} + P\left(x - \frac{L}{4}\right) \quad 1$$

$\frac{L}{2} < x < L$



$$\Rightarrow M(x) = Ax - w_0\frac{x^2}{2} + P\left(x-\frac{L}{4}\right) + Q\left(x-\frac{L}{2}\right)$$

- Cálculo desplazamiento en B $\qquad \delta_B = \frac{\partial U_T}{\partial Q}$ con $Q=0$

$$\delta_B = \underbrace{\frac{1}{EI}}_{\text{constantes}} \int_0^L M(x)\frac{\partial M}{\partial Q}\,dx \quad \text{con } Q=0$$

pero
$$M = \begin{cases} Ax - w_0\frac{x^2}{2} & 0<x<L/4 \\ Ax - w_0\frac{x^2}{2} + P\left(x-\frac{L}{4}\right) & L/4<x<L/2 \\ Ax - w_0\frac{x^2}{2} + P\left(x-\frac{L}{4}\right) + Q\left(x-\frac{L}{2}\right) & L/2<x<L \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial Q}x & 0<x<L/4 \\ \frac{\partial A}{\partial Q}x & L/4<x<L/2 \\ \frac{\partial A}{\partial Q}x + x - \frac{L}{2} & L/2<x<L \end{cases} \qquad \text{pero } \frac{\partial A}{\partial Q} = -\frac{1}{2}$$

Luego
$$\delta_B = \frac{1}{EI}\left\{\int_0^{L/4} -\frac{x}{2}\left(Ax - w_0\frac{x^2}{2}\right)dx + \int_{L/4}^{L/2} -\frac{x}{2}\left(Ax - w_0\frac{x^2}{2} + P\left(x-\frac{L}{4}\right)\right)dx \right.$$
$$\left. + \int_{L/2}^{L}\left(Ax - w_0\frac{x^2}{2} + P\left(x-\frac{L}{4}\right) + Q\left(x-\frac{L}{2}\right)\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{L}{2}\right)dx\right\} \quad \text{con } Q=0$$

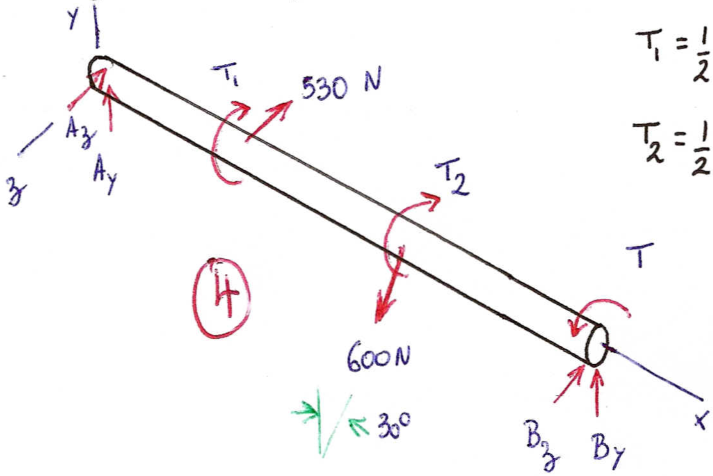
$$= \frac{1}{EI}\underbrace{\left\{-\frac{AL^3}{48} - \frac{5L^3P}{768} + \frac{L^4 w_0}{256} + \frac{L^3}{768}\left(-32A - 20P - 8Q + 11Lw_0\right)\right\}}_{\text{con } Q=0}$$

pero queremos encontrar P tal que $\delta_B = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{P = \frac{10}{11}Lw_0}$$

31

② • Diagrama de cuerpo libre



$T_1 = \frac{1}{2}(450 - 80) * 0.12 = 22.2$ Nm 1

$T_2 = \frac{1}{2}(500 - 100) * 0.3 = 60$ Nm 1

$\sum T_x = 0 \Rightarrow T = T_1 + T_2 = 82.2$ Nm

$\sum_A M_z = 0$

$\Updownarrow$

$B_y * 1.1 - 600 \cos 30° * 0.8 = 0$

$\Rightarrow B_y = 377.9$ N

$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow A_y + B_y - 600 \cos 30° = 0$ 1

$\Rightarrow A_y = 141.713$ N

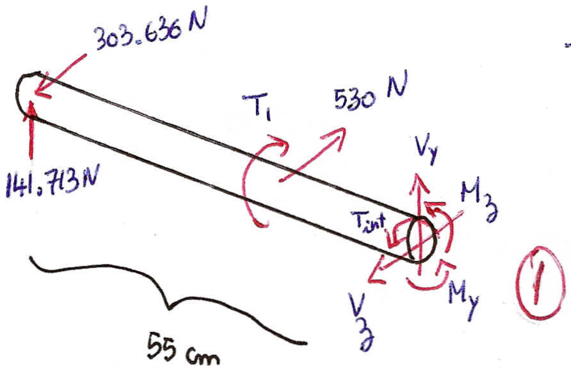
$\sum_A M_y = 0 \Leftrightarrow B_z * 1,1 - 600 \text{ sen } 30° * 0.8 + 530 * 0,3 = 0$

$\Rightarrow B_z = 73.636$ N

$\sum F_z = 0 \Leftrightarrow A_z + B_z - 600 \text{ sen } 30° + 530 = 0$

$\Rightarrow A_z = -303.636$ N 1

• Fuerzas, momentos y torques internos en B-B



1

T_{int} : torque interno (x)

del equilibrio para esta parte del eje tenemos

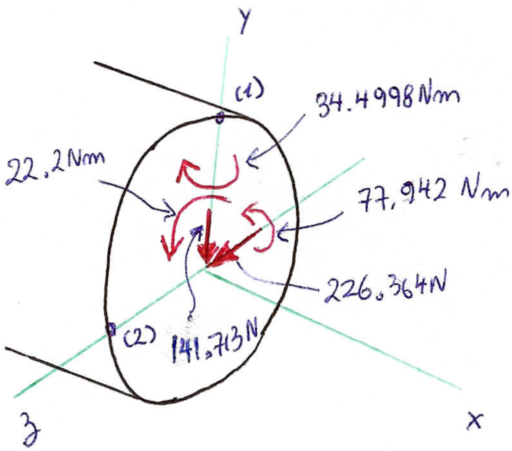
$T_{int} = T_1 = 22.2$ Nm 1

$V_y = -141.713\ N$ $\quad V_z = 530 - 303.636 = 226.364\ N$ (1)

$M_z = 141,713 * 0,55 = 77.942\ Nm$ (1)

$M_y = 530 * 0,25 - 303.636 * 0,55 = -34,4998\ Nm$ (1)

Fuerzas internas sección B-B



(1)

• tipos de esfuerzos

(1) (i) - No hay esfuerzo normal por flexión 34,4998 Nm (y)

(1) (ii) - Hay esfuerzo de compresión por flexión 77.942 Nm (z)

(1) (iii) - Hay esfuerzo de corte por torsión por 22,2 Nm (x)

(iv) - No hay esfuerzo de corte por fuerza de corte 141.713 N (y)

(1) (v) - Hay esfuerzo de corte por fuerza de corte 226.364 N (z)

(1) (2) (i) - Hay esfuerzo de compresión por flexión 34.4998 Nm (y)

(ii) - No hay esfuerzo normal por flexión 77.942 Nm (z)

(1) (iii) - Hay esfuerzo de corte por torsión por 22.2 Nm (x)

(1) (iv) - Hay esfuerzo de corte por fuerza de corte 141.713 N (y)

(v) - No Hay esfuerzo de corte por fuerza de corte 226.364 N (z)

5 • Cálculo esfuerzos

(1) (ii) $$\sigma_x = \frac{M_z\, y_{max}}{I} = \frac{-77.942 * D/2}{\left(\frac{\pi D^4}{64}\right)} = -29.404 \text{ MPa}$$ 1

(iii) $$\tau_{xz} = \frac{T\, D/2}{J} = \frac{T\, D/2}{\left(\frac{\pi D^4}{32}\right)} = \frac{T}{\left(\frac{\pi D^3}{16}\right)} = 4.1875 \text{ MPa}$$ 1

(v) $$\tau_{xz} = \frac{V_z}{I\,t}\underbrace{\int_0^{D/2} \xi\, dA}_{\frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3} = \frac{226.364}{\left(\frac{\pi D^4}{64}\right) D}\,\frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3$$ 1

$$= 0.42699 \text{ MPa}$$

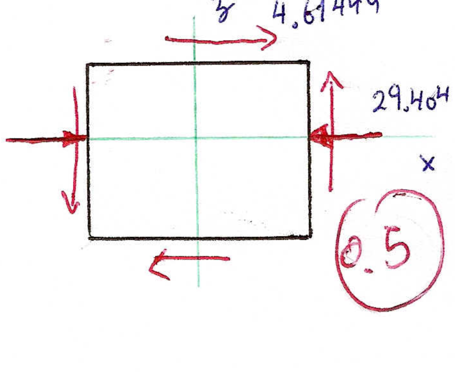
(2) (i) $$\sigma_x = -\frac{34.4998 * D/2}{\left(\frac{\pi D^4}{64}\right)} = -13.0153 \text{ MPa}$$ 0.5

(iii) $$\tau_{xy} = -4.1875 \text{ MPa}$$

(iv) $$\tau_{xy} = -\frac{141.713}{\frac{\pi D^5}{64}}\,\frac{2}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 = -0.2673 \text{ MPa}$$ 0.5

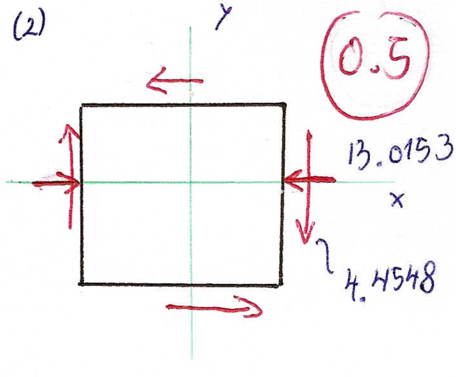
• Cuadrados diferenciales

(1)



0.5

(2)



0.5

16

- Esfuerzos principales (fórmula)

(1) $\sigma_n = \begin{cases} 0.7071 \text{ MPa} & 1 \\ -30.111 \text{ MPa} & 1 \end{cases}$

(2) $\sigma_n = \begin{cases} 1.3787 \text{ MPa} & 1 \\ -14.394 \text{ MPa} & 1 \end{cases}$

- Esfuerzos de Von Mises 1 1

(1) $\sigma_{VM} = 30.4707$ MPa

(2) $\sigma_{VM} = 15.13053$ MPa

- Factor de seguridad $FS = \dfrac{\sigma_0}{\sigma_{VM}}$ 2

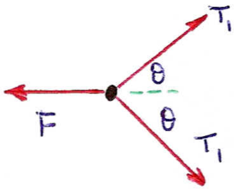
(1) $FS = 3.2818$ 1

(2) $FS = 6.609$ 1

7| (3)

Cable Lado izquierdo

(1)

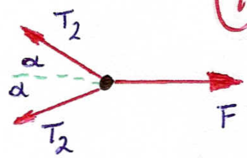


$\tan\theta = \dfrac{500}{450}$

(1) $T_1 = \dfrac{F}{2\cos\theta}$

Cable Lado derecho

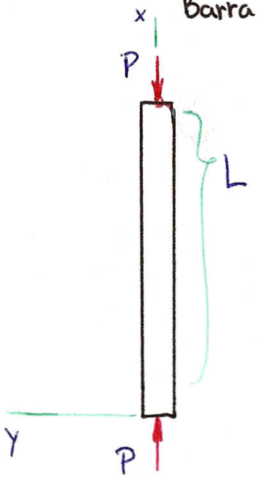
(1)

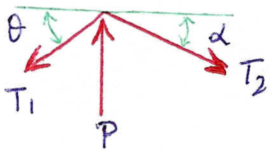


$\tan\alpha = \dfrac{500}{900}$

$T_2 = \dfrac{F}{2\cos\alpha}$ (1)

Barra DCL





$P = T_1 \operatorname{sen}\theta + T_2 \operatorname{sen}\alpha$

$\Rightarrow P = \dfrac{F}{2}(\tan\theta + \tan\alpha)$ (2)

$L = 1\ m$

en la parte superior e inferior los cables se conectan a un pasador $\Rightarrow$ $\hat{y}(0)=0$ $\quad \hat{y}(L)=0$

$\Rightarrow$ libre de "girar" $\Rightarrow$ $\dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0)=0$ $\quad \dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L)=0$ (2)

de $\quad \hat{y} = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\dfrac{P}{EI}}\,x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\dfrac{P}{EI}}\,x\right) + c_3 x + c_4$

Se llega a $\quad \sqrt{\dfrac{P_{cr}}{EI}}\,L = \pi \quad$ (primera carga)

(2)

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

luego $\quad F_{cr} = \dfrac{2P_{cr}}{\tan\theta + \tan\alpha} = \dfrac{2\dfrac{\pi^2}{L^2}EI}{\tan\theta + \tan\alpha}$ (1)

y $\underbrace{F_{adm}}_{\text{admisible}} = \dfrac{F_{cr}}{F.S}$ 2

$$\Rightarrow F_{adm} = \frac{\dfrac{2}{F.S}\,\dfrac{\pi^2 E I}{L^2}}{\tan\theta + \tan\alpha} \qquad I = \frac{\pi D^4}{64}$$

$\Rightarrow F_{adm} = 52630.87 \ N$ 2