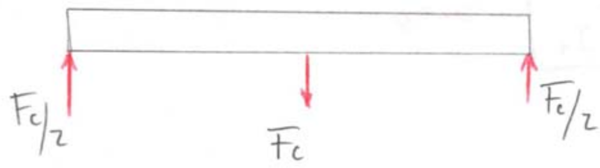
Pauta Control 3, pregunta #1

total 23 ptos

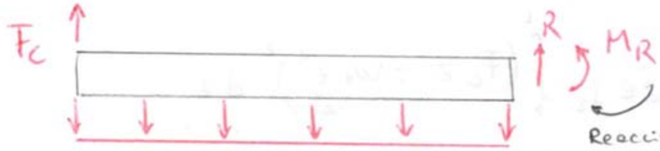
DCL viga 1.



1.0

(fuerza del cable

DCL. viga 2

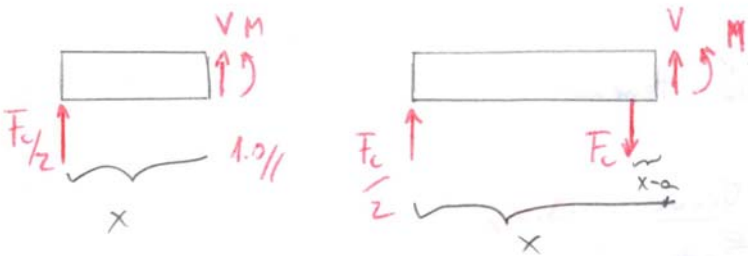


1.0

Reacciones extremo empotrado

Para Castigliano se considerará solo la energía de deformación por flexión.

Energía Viga 1:



1.0

1.0

$$M = \frac{F_c}{2}x \qquad\qquad M = F_c\left(a - \frac{x}{2}\right)$$

$$U_1 = \int_0^{2a} \frac{M(x)^2}{2EI_1}\,dx = 2\int_0^{a} \frac{M(x)^2}{2EI_1}\,dx \qquad 1.0$$

$$= \frac{2}{EI_1}\int_0^a \left(\frac{F_c x}{2}\right)^2 dx = \frac{F_c^2}{EI_1}\int_0^a \frac{x^2}{4}\,dx = \frac{F_c^2 a^3}{12EI_1}$$

Desplazamiento en el punto del cable δ_1

$$\boxed{\delta_1 = \frac{\partial W_1}{\partial F_c} = \frac{F_c\, a^3}{6 E I_1}} \quad 3.0$$

Energía Viga 2.

$$M_c = F_c z - w_0 \frac{z^2}{2}$$

$$U_2 = \int_0^L \frac{1}{2EI_2} M(z)^2\, dz = \frac{1}{2EI_2} \int_0^L \left(F_c z - w_0 \frac{z^2}{2}\right)^2 dz$$

$$= \frac{1}{2EI_2}\left(F_c^2 \frac{L^3}{3} - F_c w_0 \frac{L^4}{4} + w_0^2 \frac{L^5}{20}\right) \quad 3.0$$

Desplazamiento punto A δ_2

$$\delta_2 = \frac{\partial U_2}{\partial F_c} = \frac{1}{2EI_2}\left(2 F_c \frac{L^3}{3} - w_0 \frac{L^4}{4}\right) \quad 2.0$$

Pero para el cable tenemos

$$\varepsilon_{cable} = \frac{\sigma_{cable}}{E_{cable}} \quad 3.0$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L_{cable}}{L_{cable}} = \frac{F_c}{A_{cable} E_{cable}} \quad 2.0 \qquad \text{pero} \quad \underbrace{\Delta L_{cable} = \delta_2 - \delta_1 > 0}_{3.0}$$

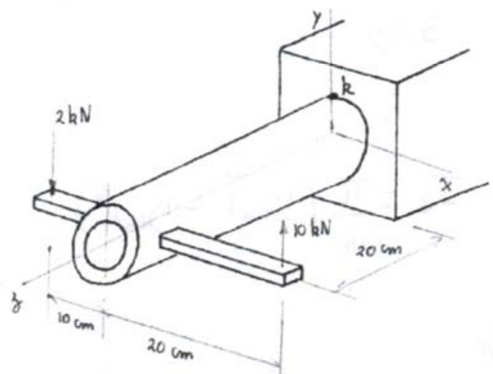
$$\Rightarrow F_c \frac{L_{cable}}{A_{cable} E_{cable}} = \frac{1}{2EI_2}\left(2F_c \frac{L^3}{3} - \frac{w_0 L^4}{4}\right) - \frac{F_c\, a^3}{6 E I_1}$$

$$F_c = \frac{3 A_{cable} E_{cable} I_1 L^4 w_0}{4\left(2 A_{cable} E_{cable} I_1 L^3 - a^3 A_{cable} E_{cable} I_2 - 6 E I_1 I_2 L_{cable}\right)} \quad 1.0$$

$$\Rightarrow F_c = 11.701 \text{ N} \quad 1.0$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_2 = 0{,}01015 \text{ m} = 1.015 \text{ cm}} \quad 1.0$$

Pauta P2 – C3

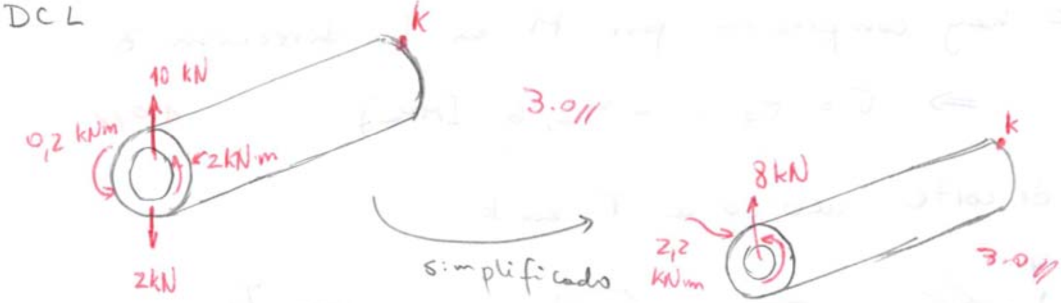


$D_{ext} = 80\,mm$

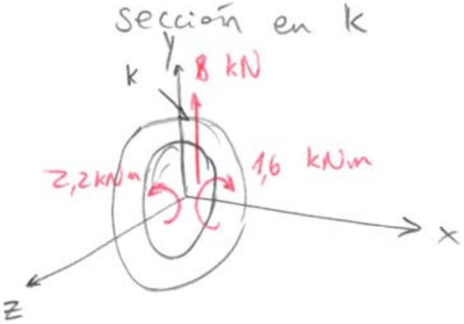
$e = 8\,mm$

total. 28 //

DCL



sección en k



En la sección actúa

$\vec{V} = 8\,kN\ \hat{j}$

$\vec{T} = 2{,}2\ kNm\ \hat{k}$ 3.0 //

$\vec{M} = -\,1{,}6\ kNm$

V → genera esf. de corte, pero en k es igual a cero, se encuentra en la superficie externa.

T → genera esf. de corte por torsión 3.0 //

M → " " compresión por flexión.

T: $\tau = \dfrac{T\, D_{ext}/2}{J}$ $\qquad J = \left(D_{ext}^4 - D_{int}^4\right)$, $D_{int} = D_{ext} - e$

$\Rightarrow \tau = 63{,}6$ [MPa] 3.0//

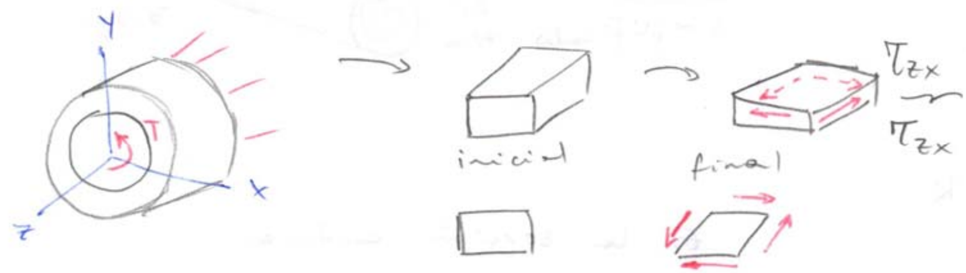
M: $\sigma = -\dfrac{M y}{I_z}$ $\rightarrow y = \dfrac{D_{ext}}{2}$ $\qquad I_z = \dfrac{\pi}{64}\left(D_{ext}^4 - D_{int}^4\right)$

$\sigma = -92{,}6$ [MPa] 3.0//

- En K hay compresión por M en la dirección z

$\Rightarrow \sigma = \sigma_z = -92{,}6$ [MPa] 1.0//

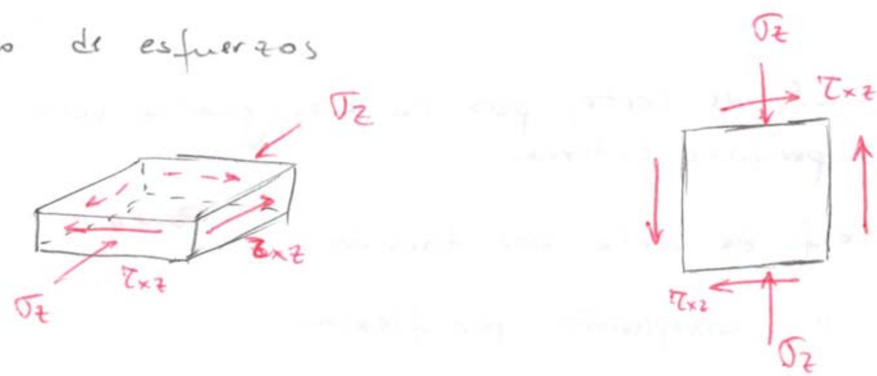
- Esf. de corte debido a T en k



$\tau_{xz} = -63{,}6$ // 3.0//

apunta hacia $-x$

Estado de esfuerzos



2.0//

$$\sigma_n = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 32,4 \ [MPa] = \sigma_1 \\ -124,9 \ [MPa] = \sigma_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

$$= 144 \ [MPa]$$

2.0 //

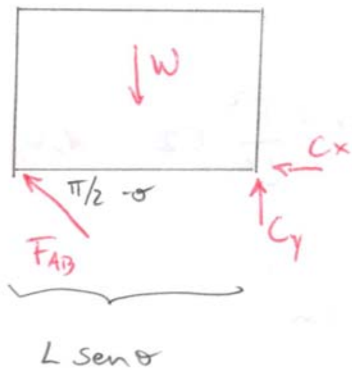
$\sigma_y = 250 \ [MPa]$, $F.S = 1,5$

$$\Rightarrow \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{F.S} = 166,7 \ [MPa] > \sigma_{VM}$$

$\therefore$ No falla ✓ 2.0 //

P3 - C3 Total: 24 ptos //

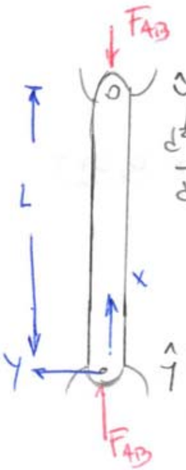
DCL



$$\sum M_z = 0 \Rightarrow F_{AB}\cos\theta\, L\,\text{sen}\theta = W\frac{L}{2}\text{sen}\theta$$

$$\Rightarrow F_{AB} = \frac{W}{2\cos\theta}$$ 2.0//

Plano x - y → Carga Crítica



$\hat{y}(L) = 0$

$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L) = 0$

$\hat{y}(0) = 0$

$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0) = 0$

2.0//

$$\frac{d^4\hat{y}}{dx^4} + \frac{P}{EI}\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = 0 \Rightarrow$$

1.0// $$\hat{y}(x) = C_1\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_3 x + C_4$$

$$\frac{d\hat{y}}{dx} = C_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) - C_2\sqrt{\frac{P}{EI}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + C_3$$

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = -C_1\frac{P}{EI}\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) - C_2\frac{P}{EI}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right)$$

$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ 1.0//

$\hat{y}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = 0$ 1.0//

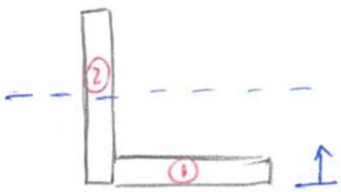
$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L) = 0 \Rightarrow C_1\frac{P}{EI}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) = 0$ 1.0//

$\hat{y}(L) = 0 \Rightarrow \underbrace{C_1\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right)}_{=0} + C_3 L = 0 \Rightarrow C_3 = 0$ 1.0//

tenemos $\quad \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) = 0$

Carga crítica $\quad \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}\,L = \pi \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2}\,EI \quad$ 1,0

Cálculo de I



$$\bar{y}_1 = e/2 = 0,5 \text{ cm}$$
$$\bar{y}_2 = a/2 = 7,5 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{A_1\bar{y}_1 + A_2\bar{y}_2}{A_1 + A_2}$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{0,01 \times (0,15 - 0,01) \times 0,005 + 0,01 \times 0,15 \times 0,075}{(0,15 - 0,01) \times 0,01 + 0,15 \times 0,01}$$

$$\bar{y} = 4,1206 \text{ cm}$$ 1.0

$$I_1 = \frac{1}{12}\,(0,15 - 0,01) \times 0,01^3 = 1,167 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$

$$I_2 = \frac{1}{12} \times 0,01 \times 0,15^3 = 2,8125 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

respecto al eje neutro:

$$\bar{I}_1 = I_1 + (4,12 \times 10^{-2} - 0,005)^2 \times 0,01 \times (0,15 - 0,01)$$
$$= 1,847 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$ 0.5

$$\bar{I}_2 = I_2 + (4,12 \times 10^{-2} - 0,075)^2 \times 0,01 \times 0,15$$
$$= 4,53 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$ 0.5

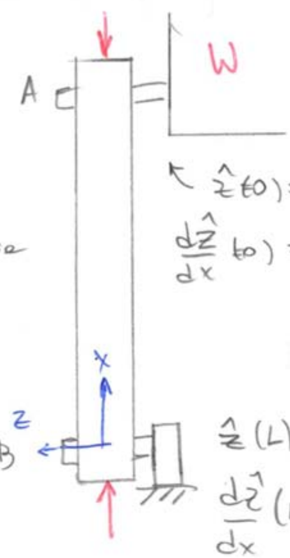
$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{\pi^2}{2^2} \times 200 \times 10^9 \times 6,37 \times 10^{-6}$$

$$\boxed{P_{cr} = 3.144,7 \text{ [kN]}}$$ 1.0

$$F_{AB} = P_{cr} \Rightarrow W = \underbrace{2\cos\theta}_{1} F_{AB} = 3.144{,}7 \text{ kN}$$

$$\boxed{W = 3.144{,}7\,[kN]} \quad 1.0$$

Plano x-z



barra AB

$\hat{z}(0) = 0$

$\frac{d\hat{z}}{dx}(0) = 0$ 1

$\hat{z}(L) = 0$

$\frac{d\hat{z}}{dx}(L) = 0$ 1

En este plano se comporta como si estuviese empotrado en A, B ⇒ No se desplaza en esos puntos y además el ángulo es nulo en esos puntos.

$$z(x) = C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\, x\right) + C_3 x + C_4$$

$$\frac{d\hat{z}}{dx}(0) = 0 \Rightarrow C_1\sqrt{\frac{P}{EI}} + C_3 = 0 \Rightarrow C_3 = -C_1\sqrt{\frac{P}{EI}} \quad 1.0$$

$$\hat{z}(0) = 0 \Rightarrow C_2 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -C_2 \quad 1.0$$

$$\frac{d\hat{z}}{dx}(L) = 0 \Rightarrow C_1\sqrt{\frac{P}{EI}}\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) - C_2\sqrt{\frac{P}{EI}}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) - \sqrt{\frac{P}{EI}}C_1 = 0 \quad 1.0$$

$$\hat{z}(L) = 0 \Rightarrow C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}L\right) - \sqrt{\frac{P}{EI}}C_1 L - C_2 = 0 \quad 1.0$$

Sea $\eta = \sqrt{\frac{P}{EI}}L$, el sistema anterior se puede escribir como:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \eta\cos\eta - \eta & -\eta\operatorname{sen}\eta \\ \operatorname{sen}\eta - \eta L & \cos\eta - 1 \end{pmatrix}}_{K} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1.0$$

La solución no trivial se determina si el determinante de la matriz $K = 0$, ya que en ese caso C_1 y C_2 pueden ser arbitrarios. $\Rightarrow$ C_1 y C_2 pueden ser grandes $\Rightarrow$ pandeo. 1.0//

$$\det K = 0 \Rightarrow (\eta \cos\eta - \eta)(\cos\eta - 1) + \eta \operatorname{sen}\eta (\operatorname{sen}\eta - \eta L) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\eta - 2\eta\cos\eta - \eta^2 L \operatorname{sen}\eta}_{} = 0$$

solución $\eta = 2\pi$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}}\, L = 2\pi \Rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$$

$$\Rightarrow P_{cr} = \frac{4\pi^2}{2^2} \times 200 \times 10^9 \times 6{,}37 \times 10^{-6}$$

$$P_{cr} = 12{,}578{,}6 \ [kN]$$ 1.0//

$$\Rightarrow W = 12.578{,}6 \ [kN]$$

$\therefore$ El peso máximo para que no se produzca pandeo es $3.144{,}7$ [kN]

1.0//