Control 3, Resistencia de Materiales ME3202
2er semestre 2011-2012

Profesor: R. Bustamante

1. (25 puntos). Una viga ABC como la mostrada en la Figura 1 está empotrada en A y en B está sobre un resorte[1] de constante k. Una carga concentrada P se aplica en C. Determine el desplazamiento hacia abajo δ_c del punto C. Resuelva el problema usando el teorema de Castigliano.

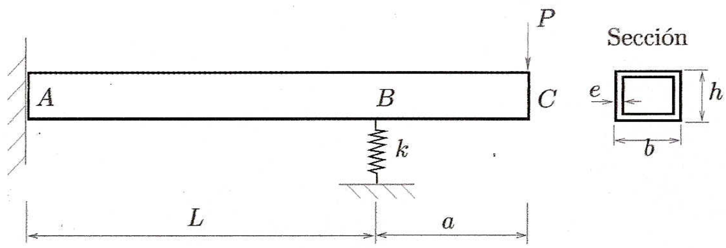


Figura 1: Viga apoyada en resorte.

Datos: $P = 1\text{kN}$, $L = 2\text{m}$, $a = 60\text{cm}$, $E = 200\text{GPa}$, $b = 8\text{cm}$, $h = 7\text{cm}$, $e = 5\text{mm}$, $k = 5\text{kN/m}$.

2. (20 puntos) La prensa C mostrada en la Figura 2 está hecha de acero. Determine la fuerza de sujeción permisible P que la prensa puede ejercer si se desea un factor de seguridad de 4.

   Considére dimensiones en cm y $\sigma_o = 300\text{MPa}$

3. (15 puntos) La placa de la Figura 3 está sometida a las distribuciones de fuerza (superficiales) mostrada en los bordes. Usando el circulo de Mohr resuelva:

   - Para el punto P, que se encuentra en el centro de la placa, determine si la placa falla con el criterio del corte máximo, e indique en que orientación en relación al eje $x - y$ ocurriría ese corte. Si no falla indique el factor de seguridad.
   - Para el mismo punto P determine el estado de esfuerzos para un cuadrado diferencial rotado en un ángulo θ, como se muestra en la misma figura.

   Datos: $\sigma_1 = 100\text{MPa}$, $\sigma_2 = 50\text{MPa}$, $\tau = 50\text{MPa}$, $\theta = 30°$, $\sigma_o = 340\text{MPa}$

[1] El resorte inicialmente no está ni estirado ni comprimido.

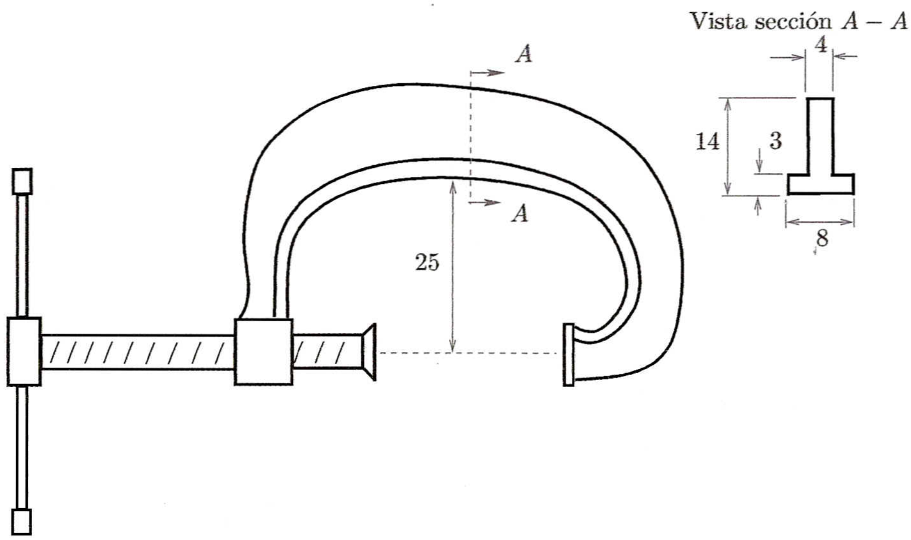


Figura 2: Prensa C.

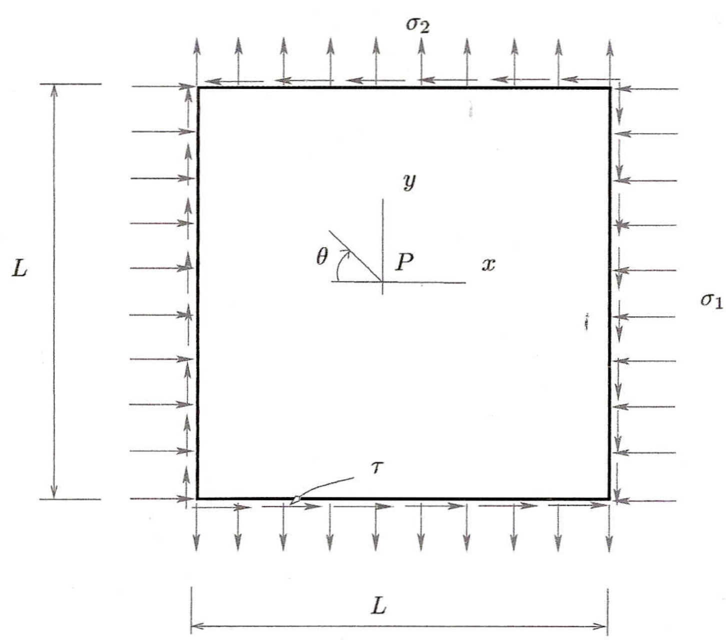


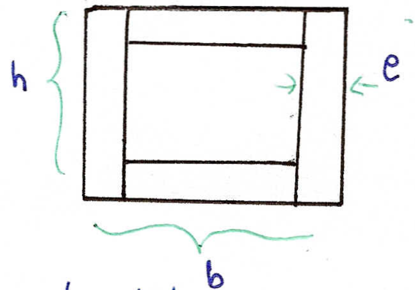
Figura 3: Placa plana con fuerzas.

Formulario

- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{T r}{J}$
- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z} y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y' \, \mathrm{d}A$. Momento de inercia $I_z = \int_A y^2 \, \mathrm{d}A$. Segundo momento área sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$; sección circular $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$. Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$.
- Corte sección arbitraria: $\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi \, \mathrm{d}A$. Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA} \mathrm{d}x$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} \mathrm{d}x$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} \, \mathrm{d}x$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{V(x)^2}{GA} \, \mathrm{d}x$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$.

Pauta Control 3

(i) Cálculo I_z

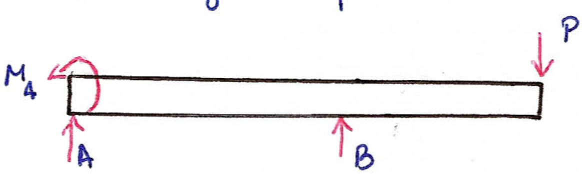


Eje neutro pasa por la mitad

$$I_z = 2\,\frac{e h^3}{12} + 2\left[(b-2e)\frac{e^3}{12} + (b-2e)\,e\left(\frac{h-e}{2}\right)^2 \right]$$

$$= 1.0266 * 10^{-6}\ m^4 \qquad 1$$

DCL viga completa



$\Sigma F_y = 0$

$\Rightarrow A + B = P \Rightarrow A = P - B \qquad 1$

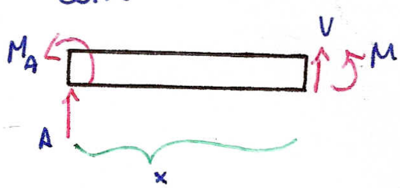
$\Sigma_A M_z = 0$

$\Rightarrow M_A + BL = (L+a)P$

$\Rightarrow M_A = (L+a)P - BL \qquad 1$

Cálculo $M(x)$ para Castigliano
(solo considerar energía por flexión)

Corte $0 < x < L$

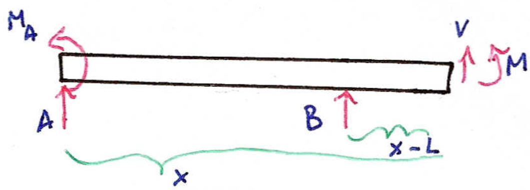


$\Rightarrow M(x) = Ax - M_A$

$= (P-B)x - (L+a)P + BL$

$= (x-L-a)P + (L-x)B \qquad 1$

Corte $L < x < L+a$



$M(x) = Ax + B(x-L) - M_A$

$= (P-B)x + B(x-L) - (L+a)P + BL$

$= (x-L-a)P \qquad 1$

se tiene $M(L+a) = 0$ ✓

En el punto B hay un resorte con constante k y la fuerza B debe ser tal que cumpla

$$\circledast \quad B = -k\,\hat{y}(L) \quad (4) \quad \hat{y}(L) \text{ es la deflexión en } x = L$$

Con Castigliano tenemos $\hat{y}(L) = \delta_B$ (2) evaluado con $F = B$

$$(2) \quad \delta_B = \frac{1}{EI_z}\int_0^{L+a} M\frac{\partial M}{\partial B}\,dx \quad \text{pero} \quad \frac{\partial M}{\partial B} = \begin{cases} L-x & 0<x<L \\ 0 & L<x<a+L \end{cases}$$

luego
$$\delta_B = \frac{1}{EI_z}\int_0^{L}\left[(x-L-a)P + (L-x)B\right](L-x)\,dx$$

$$= \frac{L^2}{6EI_z}(2BL - 3aP - 2LP) \quad (3)$$

de $\circledast$ se tiene

$$B = -\frac{kL^2}{6EI_z}(2BL - 3aP - 2LP)$$

$$\Rightarrow B = \frac{kL^2(3a+2L)P}{6EI_z + 2kL^3} = 88.42 \text{ N} \quad (3)$$

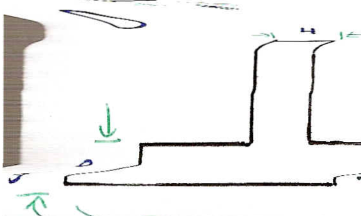
Para calcular δ_C se tiene

$$(1) \quad \delta_C = \frac{1}{EI_z}\int_0^{L+a} M\frac{\partial M}{\partial P}\,dx \quad \text{pero} \quad \frac{\partial M}{\partial P} = \begin{cases} x-L-a & 0<x<L \\ x-L-a & L<x<L+a \end{cases}$$

usando en M el B calculado anteriormente eje neutro

$$\bar{y} = \frac{1.5 * 8 * 3 + (3 + \frac{11}{2}) * 11 * 4}{8 * 3 + 11 * 4}$$

$= 6.029$ cm

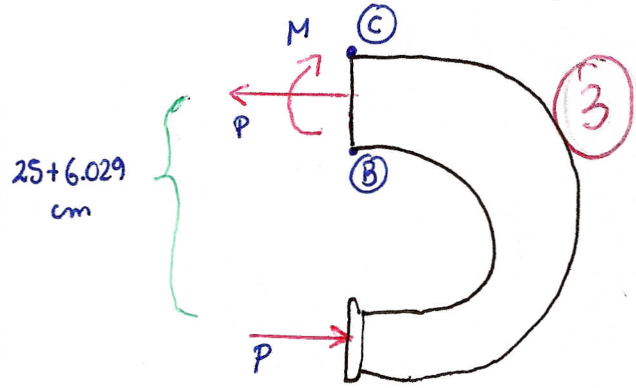


$$+ \frac{4 * 11^3}{12} + \left(\frac{11}{2} + 3 - 6.029\right)^2 * 4 * 11 = 1222.6\ cm^4$$

$$= 1.2226 * 10^{-5}\ m^4$$

2

Haciendo un corte imaginario en A-A para toda la prensa, si P es la fuerza de sujeción, tenemos



se calcula M moviendo P a la posición del eje neutro

luego equilibrio ↺ en m

$\Rightarrow M = P(0.25 + 0.06029)$

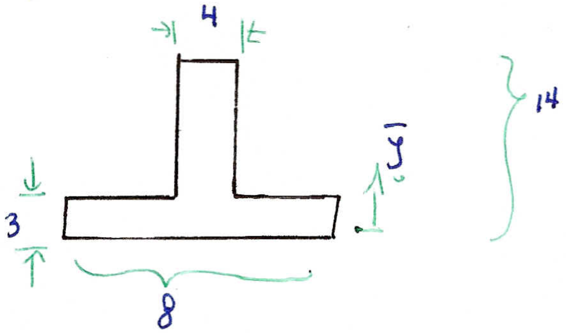
$= 0.31029\ P$ Nm

2

en el corte A-A tenemos dos tipos de esfuerzos

- Axial σ_x debido a carga axial P 1
- Axial o normal debido a flexión por M 1

② Cálculo propiedades de área



eje neutro

$$\bar{y} = \frac{1.5 * 8 * 3 + \left(3 + \frac{11}{2}\right) * 11 * 4}{8 * 3 + 11 * 4}$$

$= 6.029$ cm

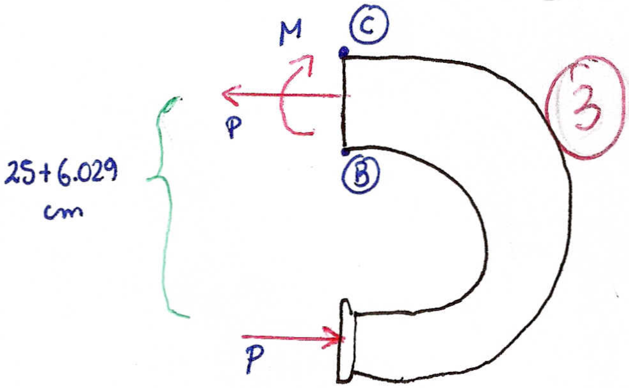
$= 0.06029$ m ①

$$I_z = \frac{8 * 3^3}{12} + (6.029 - 1.5)^2 * 8 * 3$$

$$+ \frac{4 * 11^3}{12} + \left(\frac{11}{2} + 3 - 6.029\right)^2 * 4 * 11 = 1222.6 \text{ cm}^4$$

$= 1.2226 * 10^{-5}$ m^4 ②

Haciendo un corte imaginario en A-A para toda la prensa, si P es la fuerza de sujeción, tenemos



se calcula M moviendo P a la posición del eje neutro

luego equilibrio ↺ en m

$\Rightarrow M = P\,(0.25 + 0.06029)$

$= 0.31029\ P$ Nm

②

en el corte A-A tenemos dos tipos de esfuerzos

- Axial σ_x debido a carga axial P ①
- Axial o normal debido a flexión por M ①

5)

- esfuerzo axial por P

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{P}{(8*3+11*4)10^{-4}} = 147.057\ P \quad Pa$$ 2

- esfuerzo normal por flexión por M

en punto C es de compresión
en punto B es de tracción

Luego, el efecto más fuerte sería en B, puesto que 2
en ese lugar se suman dos esfuerzos de tracción.

en B $$\sigma_x = \frac{M\bar{y}}{I_z} = 1525.89\ P \quad Pa$$ 1

Mayor esfuerzo total en B, luego

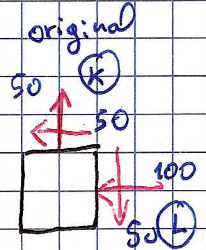
$$\sigma_{x\,total} = (1525.89 + 147.057)\ P = 1672.94\ P \quad Pa$$ 2

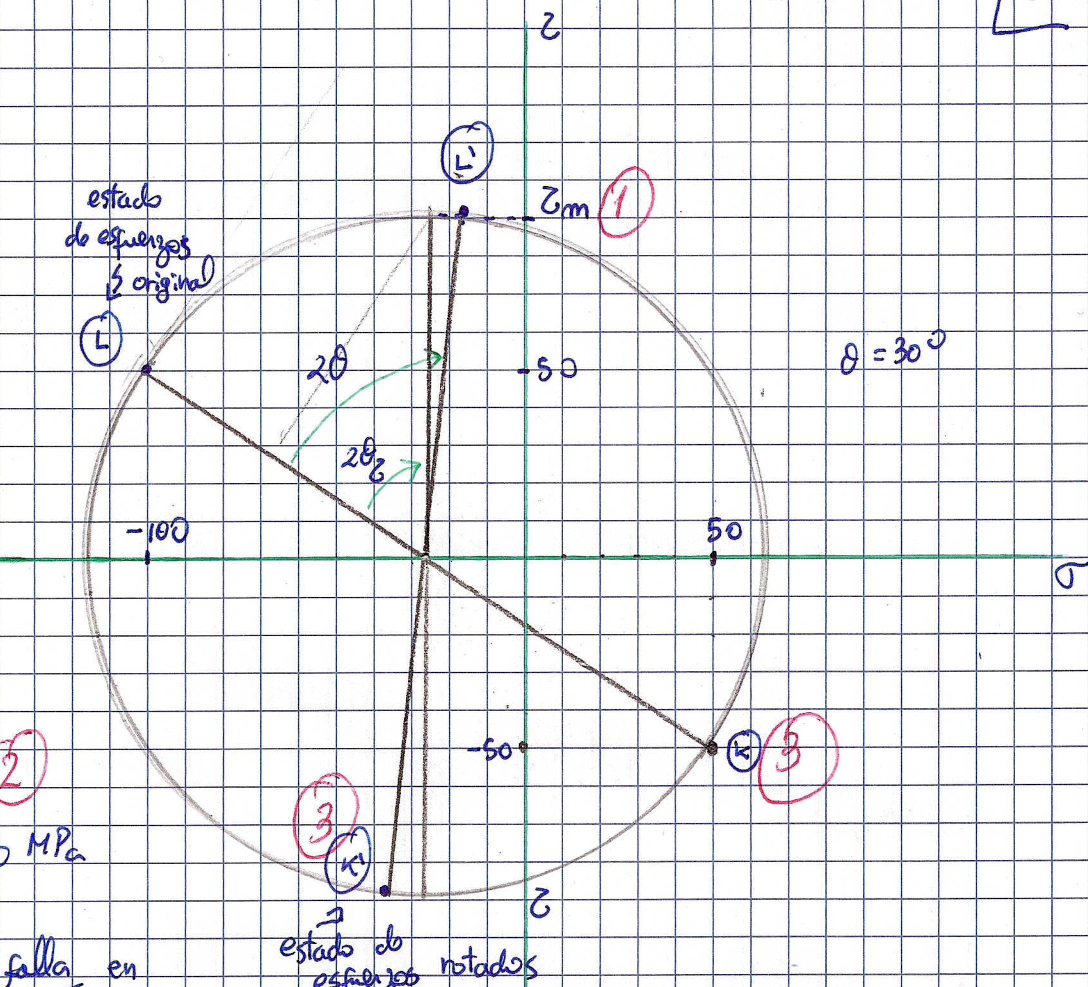
$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_0}{4} = 75\ MPa = 75*10^6\ Pa$$ 1

luego $\sigma_{x\,total} = \sigma_{adm}$

$$\Rightarrow \quad P = 44751\ N$$ 2

3





$\tau_m \approx 90$ MPa (1)

$\sigma_0 = 340$ MPa (2)

$\Rightarrow \tau_0 = \frac{340}{2} = 170$ MPa

$\Rightarrow \tau_m < \tau_0$ no falla en corte máximo

(1) F.S. $= \frac{\tau_0}{\tau_m} \approx 1.89$

$2\theta_\tau \approx 56^\circ$

$\Rightarrow \theta_\tau \approx 28^\circ$ (1)

rotado en $\theta = 30^\circ$