Control 3, Resistencia de Materiales ME3202 ME46A
1er semestre 2010

Roger Bustamante

1. En la figura 1 se tiene un poste hecho de un tubo de acero, el cual tiene un diámetro exterior de D_{ext} y un espesor de pared e. El tubo está pegado a una placa rígida, la cual recibe el

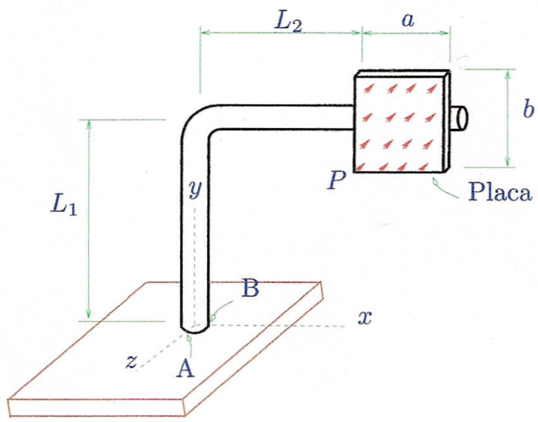


Figura 1: Poste bajo el efecto del viento

impacto del viento, el que genera una presión uniforme P sobre esa superficie de la placa (en la dirección z). El tubo está empotrado al piso.

a) ¿Por que el 'estado de esfuerzos' sería mayor en la zona de empotramiento? (5 puntos)

b) Para esa zona, para los puntos A y B, determine dicho estado de esfuerzos (dibuje los cuadrados diferenciales). (15 puntos)

c) Para A y B calcule los esfuerzos normales máximos/mínimo, y el esfuerzo de corte máximo. (5 puntos)

d) Usando el criterio del esfuerzo de corte máximo, con $FS = 2$, determine si falla o no el tubo en A y/o B. (5 puntos)

Datos:

$$L_1 = 4\text{m}, \quad L_2 = 2\text{m}, \quad a = 40\text{cm}, \quad b = 60\text{cm}, \quad D_{ext} = 12\text{cm}, \quad e = 1\text{cm}, \quad P = 7 * 10^3\text{Pa}$$

$$E = 200\text{GPa}, \quad \sigma_o = 200\text{MPa}.$$

Obs: El efecto de P se puede reemplazar por una fuerza puntual equivalente como primera aproximación.

2. En la figura 2 se tiene una viga para la cual $I = 4 * 10^{-6}\text{m}^4$ y $E = 190\text{GPa}$. La viga está empotrada en A, en tanto que en B está sobre un soporte simple. En el extremo derecho de la viga se aplica un momento $M_0 = 500\text{Nm}$. La viga también está sometida a una fuerza uniforme $w_0 = 1000\text{N/m}$. Usando el teorema de Castigliano determine las reacciones en A y B. Se tiene $L = 2\text{m}$. (20 puntos)

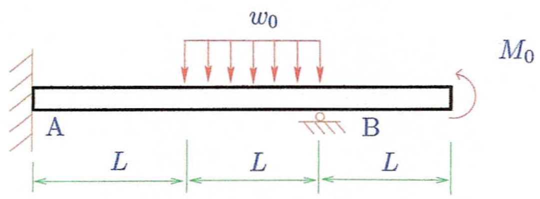


Figura 2: Problema calculo de reacciones en viga

3. En la figura 3 se tiene una columna bajo la acción de una fuerza P y un momento M_B. La

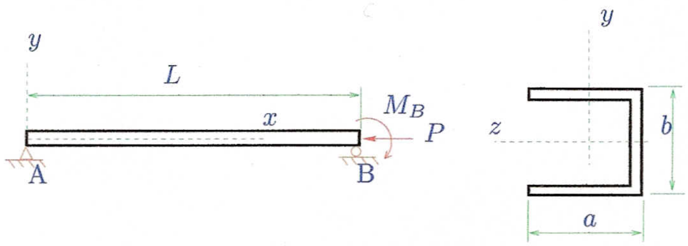


Figura 3: Columna

sección de la viga es mostrada en el lado derecho de la figura 3 (en forma ampliada). La sección tiene un espesor uniforme e. Si la viga tiene un módulo de elasticidad E, determine la carga crítica P_{cr}. (20 puntos)

Formulario

- Torsión: $T = \frac{\theta G J}{L}$. Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ y $\tau = \frac{Tr}{J}$
- Flexión: Esfuerzo $\sigma = -\frac{M(x)}{I_z}y$. Eje neutro $\bar{y} = \int_A y'\,\mathrm{d}A$. Momento de inercia $I_z = \int_A y^2\,\mathrm{d}A$. Segundo momento área sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$; sección circular $I_z = \frac{\pi D^4}{64}$. Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$.
- Corte sección arbitraria: $\tau = \frac{V}{It}\int_y^c \xi\,\mathrm{d}A$. Sección rectangular $\tau_{xy} = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$.
- Energía de deformación: Extension de una barra $U_T = \int_0^L \frac{P^2}{2EA}\mathrm{d}x$. Flexión $U_f = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI}\mathrm{d}x$. Torsión eje $U_{To} = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ}\,\mathrm{d}x$. Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V(x)^2}{GA}\,\mathrm{d}x$ (A es el área de la sección transversal).
- Esfuerzos principales: $\sigma_n = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$, $\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y-\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$.
- Esfuerzo de Von Mises $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}$.
- Pandeo: Ecuación caso general $\frac{\mathrm{d}^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} + \frac{P}{EI}\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{w(x)}{EI}$. Solución caso especial $w(x) = 0$, $\hat{y}(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + c_2\cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}x\right) + c_3 x + c_4$.

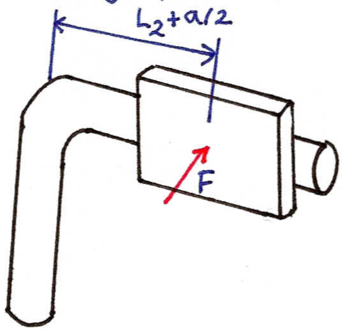
  Ecuación caso columna excéntrica: $\frac{\mathrm{d}^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} + \frac{P}{EI}\hat{y} = -\frac{Pe}{EI}$.

  Otras expresiones $\frac{\mathrm{d}^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{M(x)}{EI}$, $\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta$.

1

Pauta Control 3

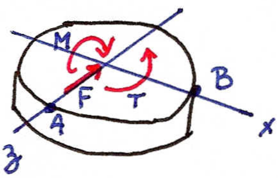
1) La fuerza puntual aplicada en la placa es $F = Pab = 1680$ N



a) En la zona de empotramiento el efecto que causa F, el que es un momento de flexión M y un torque T es mayor, debido a que la distancia a la que se mueve F es mayor. 5

Luego si M y T son mas grandes
$\Rightarrow$ los esfuerzos que generan son mayores

b) figura sección zona de interés si se traslada F



donde

$M = F L_1 = 6720$ Nm 1

$T = F(L_2 + a/2) = 3696$ Nm 1

Punto A

- no hay corte por fuerza de corte F 0.5
- hay esfuerzo de tracción por flexión por M 1
- hay esfuerzo de corte por torsión T 1

Punto B

- no hay esfuerzo normal por flexión 0.5
- hay esfuerzo de corte por F 1
- hay esfuerzo de corte por torsión T 1

Cálculo: A

$D_{int} = D_{ext} - 2e = 10$ cm

$I = \frac{\pi}{64}(D_{ext}^4 - D_{int}^4) = 5.27 \times 10^{-6}\ m^4$ 1

$J = \frac{\pi}{32}(D_{ext}^4 - D_{int}^4) = 1.054 \times 10^{-5}\ m^4$

flexión $\sigma_y = \frac{M\, D_{ext}/2}{I} = 76.508$ MPa (1)

corte torsión $\underbrace{\tau_{xy}}_{\tau_{yx}} = \frac{T\, D_{ext}/2}{J} = 21.0398$ MPa (1)

sentido negativo

Cálculo B : corte por F $\tau_{yz} = -\frac{F}{I\,t}\int_y^c \xi\, dA$

tubo: Dext-Dint

$\int_0^{D_{ext}} \xi\, dA - \int_0^{D_{int}} \xi\, dA$

$\underbrace{\int_0^{D_{ext}} \xi\, dA}_{\frac{2}{3}\left(\frac{D_{ext}^2}{4}\right)^{3/2}} \quad \underbrace{\int_0^{D_{int}} \xi\, dA}_{\frac{2}{3}\left(\frac{D_{int}^2}{4}\right)^{3/2}}$ (1)

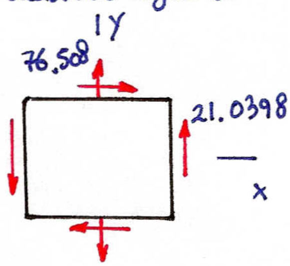
$\Downarrow$

$\tau_{yz} = -0{,}96698$ MPa
≈ 1 MPa (1)

Corte por T $\tau_{yz} = -21.0398$ MPa $\leftarrow$ mismo valor numérico anterior

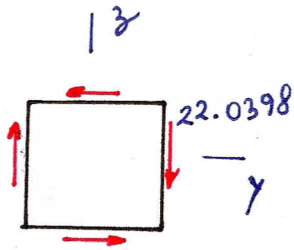
total $\Rightarrow$ $\tau_{yz_{total}} = -22.0398$ MPa (1)

Cuadrado diferencial A (5)



(1)

cuadrado diferencial B



(1)

c) Punto A $\sigma_m = \frac{76.508}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{76.508}{2}\right)^2 + 21.0398^2} = \begin{cases} 81.91 \text{ MPa máx} \\ -5.404 \text{ MPa min} \end{cases}$ (2)

$\tau = 43.658$ MPa (1)

Punto B $\sigma_m = \begin{cases} 22.0398 \text{ MPa máx} \\ -22.0398 \text{ MPa min} \end{cases}$ (2)

3 d) Criterio corte máximo $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{2} = 100$ MPa ← límite falla 2

$\tau_{adm} = \frac{\tau_0}{F.S} = 50$ MPa ← admisible corte 1

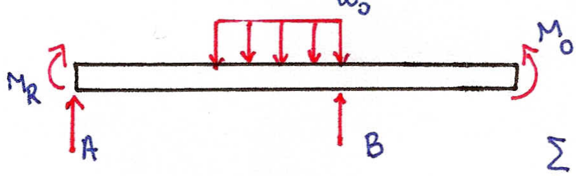
Punto A

$43.658 < \tau_{adm} \Rightarrow$ no falla en A 1

Punto B $22.0398 < \tau_{adm} \Rightarrow$ no falla en B 1

2) No se indica la forma de la sección de la viga, luego como no se sabe si es o no rectangular, por lo tanto solo se considera energía por flexión. 2

DCL



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A + B = w_0 L$$

1 $$\Rightarrow A = w_0 L - B \quad (*)$$

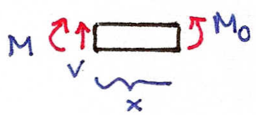
$$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow 2BL + M_0 = w_0 \frac{3L^2}{2} + M_R$$

$$\Rightarrow M_R = 2BL + M_0 - w_0 \frac{3L^2}{2} \quad (**)$$

1

Cálculo M(x)

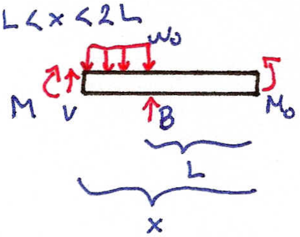
$0 < x < L$ (con x desde la derecha)



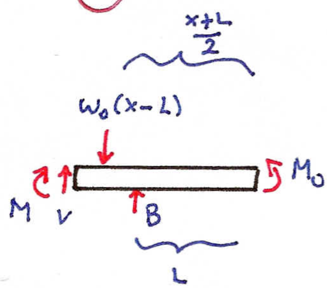
$$\Rightarrow M = M_0$$

1

$L < x < 2L$



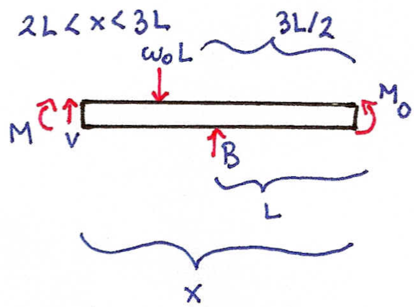
$\Leftrightarrow$



1

$$\sum M = 0 \Rightarrow \quad M = M_0 + B(x-L) - w_0 (x-L)\frac{(x-L)}{2}$$

$2L < x < 3L$



$$\sum M = 0 \Rightarrow M = M_0 + B(x-L) - w_0 L\,(x - 3L/2)$$

Desplazamiento en B es igual a cero 2

$$U_f = \int_0^{3L} \frac{M(x)^2}{2EI}\,dx \Rightarrow \delta_B = \int_0^{3L} \frac{M(x)}{EI}\frac{dM}{dB}\,dx$$

1

5|

$$\frac{dM}{dB} = \begin{cases} 0 & 0<x<L \\ x-L & L<x<2L \\ x-L & 2L<x<3L \end{cases}$$ (2)

$$\Rightarrow \delta_B = 0 = \frac{1}{EI}\left\{ \int_L^{2L} \left[M_0 + B(x-L) - \frac{w_0}{2}(x-L)^2\right](x-L)\,dx \right.$$

$$\left. + \int_{2L}^{3L} \left[M_0 + B(x-L) - w_0 L\,(x - 3L/2)\right](x-L)\,dx \right\}$$ (3)

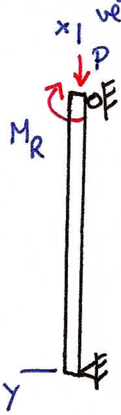
$$\Leftrightarrow \quad \frac{M_0}{2}L^2 + \frac{B}{3}L^3 - \frac{w_0}{8}L^4 + \frac{M_0}{2}3L^2 + \frac{B}{3}7L^3 - w_0 L^4 \frac{19}{12} = 0$$ (2)

$$\Leftrightarrow \quad B L^3 \frac{8}{3} = -2M_0L^2 + \frac{41}{24}w_0 L^4$$

$\Rightarrow B = 1093.75$ N (2) Luego de (*) $A = 906.25$ N (1)

y de (**) $M_R = -1125$ Nm (1)

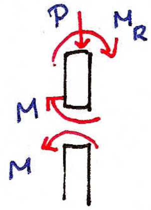
3) dibujando la figura de forma vertical



en este problema de Pandeo $w(x)=0$

$$\Rightarrow \hat{y}(x) = c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,x\right) + c_3 x + c_4$$ 1

En el extremo superior con un corte se tiene



$$\Rightarrow M(L) = -M_R$$ 2

Condiciones de borde

$\hat{y}(0)=0 \qquad \dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0) = 0$ 2

$\hat{y}(L)=0 \qquad \dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L) = \dfrac{-M_R}{EI}$ 2

Luego $\dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0)=0 \Rightarrow c_2=0 \qquad \hat{y}(0)=0 \Rightarrow c_4=0$ 1

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L) = \frac{-M_R}{EI} \Rightarrow -c_1 \frac{P}{EI} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) = \frac{-M_R}{EI}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{M_R}{P \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right)}$$ 3

$$\hat{y}(L)=0 \Rightarrow \quad c_3 L = -c_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L\right) = -\frac{M_R}{P}$$

$$\Rightarrow c_3 = \frac{-M_R}{PL}$$ 1

Luego para c_1 si $\sqrt{\frac{P}{EI}}\,L = n\pi$ se tiene $c_1 \to \infty \Rightarrow$ pandeo

luego $n=1 \quad \Rightarrow P_{cr} = \dfrac{\pi^2}{L^2} EI$ 4

7)

I para sección

$$I = \frac{eb^3}{12} + 2\left[\frac{(a-e)e^3}{12} + (a-e)e\,\frac{(b-e)^2}{4}\right] \quad 2$$

Luego

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} E \left\{ \frac{eb^3}{12} + 2\left[\frac{(a-e)e^3}{12} + (a-e)e\,\frac{(b-e)^2}{4}\right]\right\}$$

2