Control 2. Resistencia de Materiales ME3202-1 46A-2.

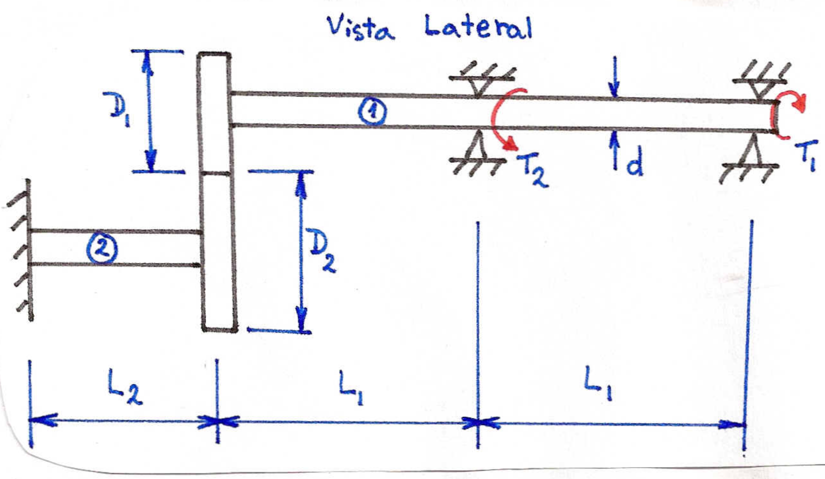
02/06/2010

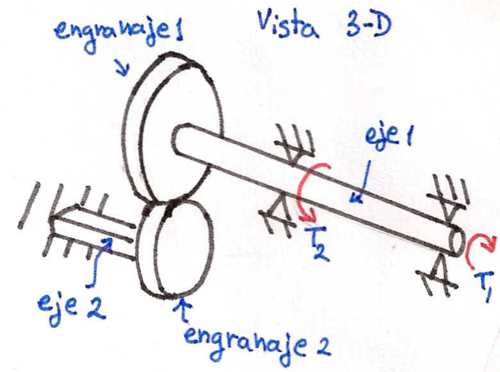
Profesor: R. Bustamante

1) El eje *1* de sección circular está sometido a un torque T_1 en su apoyo del extremo derecho, y a un torque T_2 en el apoyo intermedio. En los apoyos no hay roce. En el extremo izquierdo el eje está conectado a un engranaje de diámetro D_1. Este engranaje está en contacto con el engranaje D_2 el cual está conectado a un eje *2* de sección cuadrada de lados a_1, a_2, y que está empotrado a una pared. (20 puntos)

   a) Determine el ángulo absoluto de torsión en el punto *A*
   b) Determine los máximos esfuerzos de corte por torsión en ambos ejes y sus ubicaciones en las secciones transversales de los mismos.
   Datos:

   Eje *1* y engranaje *1*: $d = 8$cm, $G_1 = 60$GPa, $T_1 = 200$ Nm, $T_2 = 80$ Nm, $L_1 = 1.5$ m, $D_1 = 15$cm
   Eje *2* y engranaje *2*: $a_1 = 4$cm, $a_1/a_2 = 0.5$, $G_2 = 70$GPa, $D_2 = 20$cm, $L_2 = 1$m

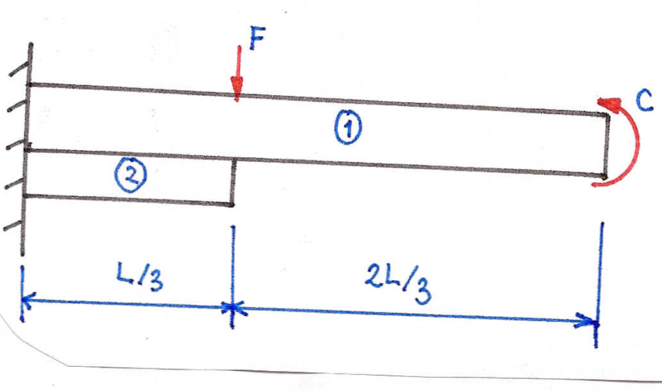


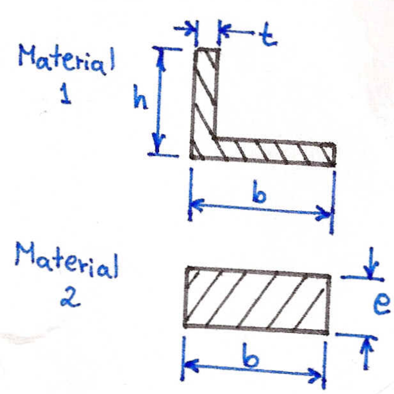


2) La viga compuesta en voladizo está sometida a una fuerza puntual *F* y a un momento puro *C* en el extremo derecho. La viga compuesta está hecha de dos materiales *1* y *2*, cuyas secciones se muestran la parte derecha de la figura. Estos dos materiales están perfectamente pegados.

   a) Calcule el eje neutro y el segundo momento de área I_z para el material *1*. (5 puntos)
   b) Determine el eje neutro para la parte compuesta de la viga. (5 puntos)
   c) Determine la distribución de esfuerzos causados por la flexión y encuentre los valores máximos para el esfuerzo de tracción/compresión por flexión (10 puntos)

Datos: $L = 1$m, $F = 1000$N, $C = 500$Nm, $h = 12$cm, $b = 15$cm, $t = 1$cm, $e = 7$ cm,
módulos de elasticidad $E_1 = 190$GPa, $E_2 = 210$GPa

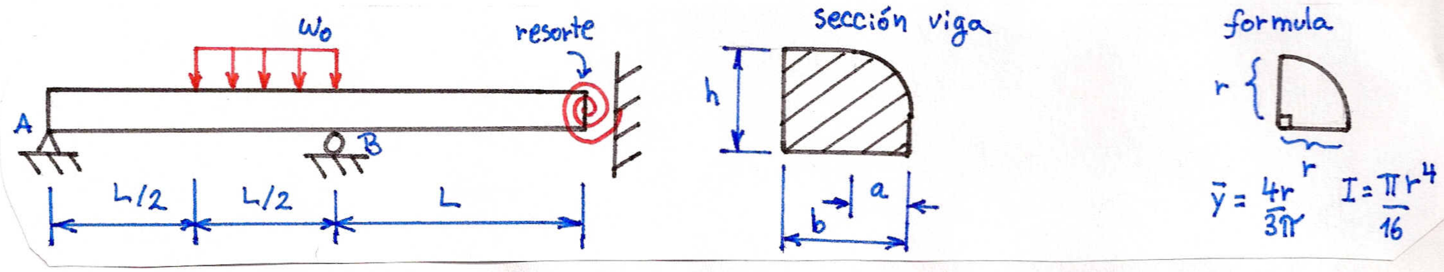




3) La viga de la figura, cuya sección se muestra en el lado derecho, está sometida a una fuerza uniforme w_0. En el extremo derecho se encuentra conectada a un resorte en espiral de constante k. Dicho resorte provoca un torque de reacción T_R igual a $k\theta$, donde θ es el ángulo de deflexión. (20 puntos)

- Determine la deflexión $\hat{y}$ para esta viga.
- Determine las reacciones en A y B.

Datos: $L = 4$m, $k = 10^6$Nm, $w_0 = 500$N/m, $h = 10$cm, $b = 12$cm, $a = 5$cm, $E = 200$GPa



Formulario

Torsión $T = \dfrac{\theta G J}{L}$ Sección circular $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$ $\tau = \dfrac{Tr}{J}$

Sección rectangular $J = k_2 a b^3$ $\tau = \dfrac{T}{k_1 a b^2}$ $b \le a$

a/b	1	1.5	2	4	10	∞
k_1	0.208	0.231	0.246	0.282	0.312	1/3
k_2	0.141	0.196	0.281	0.281	0.312	1/3

Flexión

Método área de momento $\Delta_{AB} = \int_A^B x' \dfrac{M}{EI} dx$

Esfuerzo $\sigma_x = -\dfrac{M(x)}{I_z} y$

Momento inercia de área y eje neutro

Caso general Eje neutro $\int_A y dA = 0$ $\bar{y} = \dfrac{\int_A y' dA}{A}$

momento de inercia $I_z = \int_A y^2 dA$

Sección rectangular $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$ a : base b: altura

Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$

Eje sección compuesta dos materiales Eje neutro $E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA = 0$

Esfuerzos $\sigma_{x1} = \dfrac{-E_1 M y}{E_1 I_{z1} + E_2 I_{z2}}$ $\sigma_{x2} = \dfrac{-E_2 M y}{E_1 I_{z1} + E_2 I_{z2}}$

Ecuación de la elástica

$\hat{y}$: Deflexión vertical de la viga

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{w(x)}{EI} \quad \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI} \quad \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{d\hat{y}}{dx} \approx \theta(x)$$

$$\int \delta(x-a)dx = r(x-a) \quad \int r(x-a)dx = (x-a)r(x-a) \quad \int (x-a)r(x-a)dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)$$

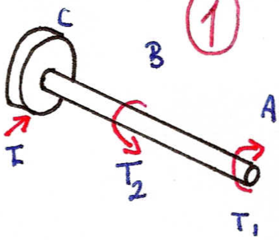
$$\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a)$$

Corte en vigas

Sección rectangular: $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{2I_z}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)$ Sección arbitraria: $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{I_z t}\int_y^c \xi \, dA$

Pauta Control

1) DCL eje 1



1

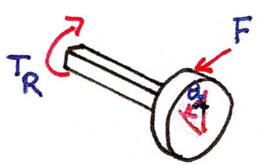
Equilibrio torque

$$F\frac{D_1}{2} = T_1 - T_2$$

$$\Rightarrow F = \frac{2(T_1 - T_2)}{D_1}$$

$$\Rightarrow F = 1600\ N$$ 1

DCL eje 2



$$T_R = F\frac{D_2}{2} = 160\ Nm$$ 1

θ_2: ángulo torsión eje 2

eje sección rectangular $a_1/a_2 = 0.5 \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = 2$

$a_1 = 4\ cm$ $a_2 = 8\ cm$, sea $a = 8\ cm$ y $b = 4\ cm$

de tabla $k_1 = 0.246$ $k_2 = 0{,}281$ 3

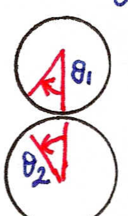
Luego $J_2 = k_2 a b^3 = 1{,}43872 \times 10^{-6}\ m^4$ 1

momento polar eje 2

Luego $\theta_2 = \frac{T_R L_2}{G_2 J_2} = 1{,}5887 \times 10^{-3}\ rad$ 1

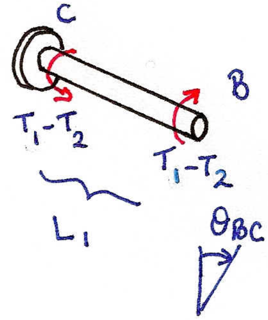
Vista frontal engranajes

θ_1: ángulo rotación engranaje 1



$$\theta_2 \frac{D_2}{2} = \theta_1 \frac{D_1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\theta_2 D_2}{D_1} = 2{,}1183 \times 10^{-3}\ rad$$ 2

Torsión eje 1 tramo BC, se hace corte poco antes de B

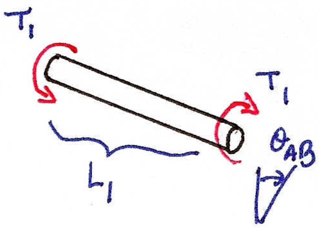


$$J_1 = \frac{\pi d^4}{32} = 4{,}02124 \times 10^{-6}\ m^4$$

θ_{BC} : ángulo torsión desde B a C

$$\theta_{BC} = \frac{(T_1-T_2)\,L_1}{G_1 J_1} = 7{,}46039 \times 10^{-4}\ rad$$ 1

torsión tramo B, se hace un corte poco después de B



θ_{AB} : ángulo de torsión de A respecto a B

$$\theta_{AB} = \frac{T_1 L_1}{G_1 J_1} = 1{,}2434 \times 10^{-3}\ rad$$ 1

θ_A : ángulo torsión total en A

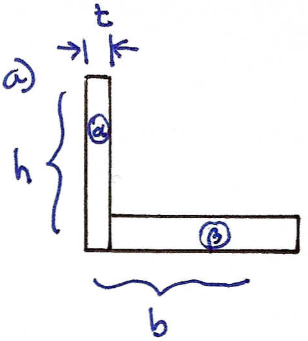
$$\theta_A = \theta_1 + \theta_{BC} + \theta_{AB} = 4{,}10774 \times 10^{-3}\ rad$$ 3

Esfuerzo máximo eje 1 : $$\tau_{max\,BA} = \frac{T_1\, d/2}{J} = 1{,}9894\ MPa$$ 2

$$\tau_{max\,BC} = (T_1-T_2)\frac{d/2}{J} = 1{,}19366\ MPa$$ 1

Esfuerzo máximo eje 2 : $$\tau_{max} = \frac{T_R}{k_1 a b^2} = 5{,}0813\ MPa$$ 2

2) a)



$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{y}_\alpha A_\alpha + \bar{y}_\beta A_\beta}{A_\alpha + A_\beta}$$

$$= \frac{\frac{h}{2} ht + \frac{t}{2}(b-t)t}{ht + (b-t)t} = 3{,}03846 \text{ cm}$$ 2

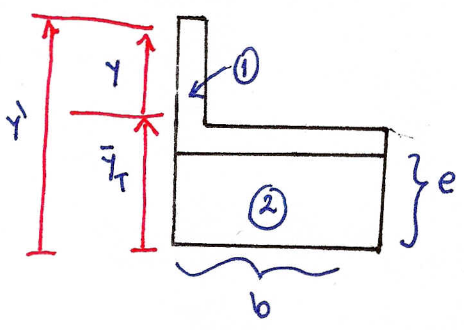
α y β secciones rectangulares $I = \frac{ab^3}{12}$

$$I_1 = \bar{I}_\alpha + \bar{I}_\beta \qquad \bar{I}_\alpha = \underbrace{I_\alpha}_{\frac{th^3}{12}} + ht\left(\bar{y} - h/2\right)^2 = 249{,}2485 \text{ cm}^4$$ 1

$$\bar{I}_\beta = \underbrace{I_\beta}_{\frac{(b-t)t^3}{12}} + (b-t)t\left(\bar{y} - t/2\right)^2 = 91{,}3796 \text{ cm}^4$$ 1

$$\Rightarrow I_1 = 340{,}628 \text{ cm}^4 = 340{,}628 \times 10^{-8} \text{ m}^4$$ 1

b) Parte viga compuesta



eje neutro $E_1 \int_{A_1} y\,dA + E_2 \int_{A_2} y\,dA = 0$

pero $y = y' - \bar{y}_T$

$$\Rightarrow E_1 \int_{A_1} y'\,dA - E_1 \bar{y}_T A_1 + E_2 \int_{A_2} y'\,dA - E_2 \bar{y}_T A_2 = 0$$

$$\Rightarrow \bar{y}_T = \frac{E_1 \int_{A_1} y'\,dA + E_2 \int_{A_2} y'\,dA}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$ 2

$$\Rightarrow \bar{y}_T = \frac{E_1 \bar{y}_1 A_1 + E_2 \bar{y}_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

→ para el eje compuesto

↗ calculado en a)

$$= \frac{E_1 [ht + (b-t)t](\bar{y}_1 + e) + E_2 \frac{e}{2} be}{E_1 [ht + (b-t)t] + E_2 be} = 4,6967 \text{ cm}$$

3

c)

$$I_{Total} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

$$\bar{I}_1 = I_1 + [ht + (b-t)t](\bar{y}_T - (\bar{y}_1 + e))^2$$

$$= 1082,511 \text{ cm}^4$$

1

$$\bar{I}_2 = \underbrace{I_2}_{\frac{be^3}{12}} + be\,(\bar{y}_T - e/2)^2$$

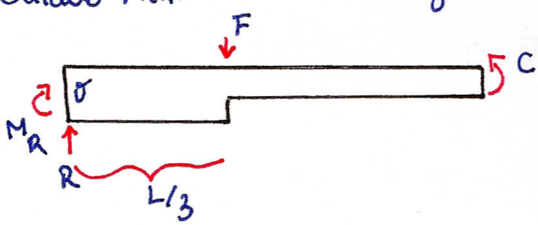
1

$$= 579,1195 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow I_{total} = 1661,63 \text{ cm}^4$$

1

Calculo $M(x)$ $\Rightarrow$ DCL viga completa



$$\sum_o M_z = 0 \Rightarrow M_R = C - \frac{FL}{3}$$

$$= 166.\bar{6} \text{ Nm}$$

$$R = F = 1000 \text{ N}$$

Distribución $M(x)$ $\quad 0 < x < L/3$

$$M(x) = M_R + xF$$

$$= 166,\bar{6} + 1000x$$

1

máximo $x \to L/3$ y $M_{max} = 500$

5| $\frac{L}{3} < x < L$ $M(x) = C = 500$ Nm

zona $0 < x < L/3$

$$\sigma_{x_1} = -\frac{E_1 M(x) y}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad \text{pero} \quad \frac{E_1}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = 58052 \ \frac{1}{m^4}$$

1

$$\Rightarrow \sigma_{x_1} = -58052\ (166,\bar{6} + 1000\ x)\ y$$

máximo $x \to L/3 = \frac{1}{3}$ m $y_{max} = h + e - \bar{y}_T$ (parte superior) $= 0,143033$

1

$$\Rightarrow \sigma_{x_{1max}} = -4,1517 \text{ MPa} \quad \text{compresión}$$

$$\sigma_{x_2} = -\frac{E_2 M(x) y}{E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad \text{pero} \quad \frac{E_2}{E_1 I_1 + E_2 I_2} = 64162,85 \ \frac{1}{m^4}$$

máximo $x \to L/3 = \frac{1}{3}$ m $y_{max} = -\bar{y}_T$ (parte inferior) $= -0,046967$ m

0,5

$$\Rightarrow \sigma_{x_{2max}} = 1,50677 \text{ MPa} \quad \text{tracción}$$

1

zona $L/3 < x < L$

$$\sigma_x = -\frac{M(x)\, y}{I_1} \qquad M(x) = C$$

I_1 ← calculado en a)

$$= -146787698\ y$$

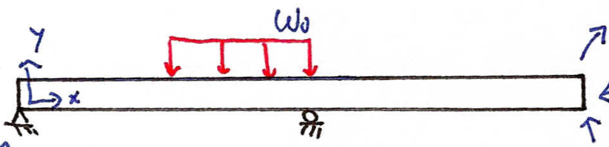
1

$Y_{max} = \underset{\substack{\uparrow \\ h}}{12} - \bar{Y}_1 = 8,96154 \text{ cm}$ ← arriba 0,5

$\Rightarrow \sigma_{x_{max}} = 13,1544 \text{ MPa}$ 1

7/

3) Calculo $\hat{y}(x)$



$\nearrow V(x=2L)=0$ (1)

$\leftarrow$ reacción resorte $\Rightarrow$ momento o torque

$\uparrow$ $M(x=2L)$ por resorte

(1) $\hat{y}(0)=0$

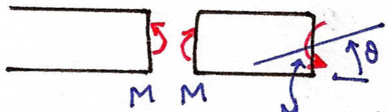
(1) $\frac{d^2\hat{y}(0)}{dx^2}=0$

$\hat{y}(L)=0$ (1)

(1)

$\Downarrow$

Corte zona resorte



M_{Res} se opone a dirección de θ

$M_{Res} = -\theta k$

pero $\theta \approx \frac{d\hat{y}}{d\theta}$

equilibrio

$M(2L) = M_{Res}$

(2)

$\Downarrow$

$$EI \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(2L) = -k \frac{d\hat{y}}{dx}(2L)$$

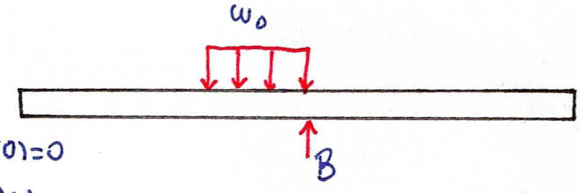
$\swarrow$

Hay cinco condiciones de "borde" $\Rightarrow$ problema hiperestático

$\Downarrow$

Se puede reemplazar la condición en $x=L$ por una fuerza B, y luego buscar B para que $\hat{y}(L)=0$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Resolver}}$$



$\hat{y}(0)=0$

$\frac{d^2\hat{y}(0)}{dx}=0$

B tal que $\hat{y}(L)=0$

$\frac{d^3\hat{y}}{dx^3}(2L)=0$

$EI\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(2L) = -k\frac{d\hat{y}}{dx}(2L)$

Luego $\dfrac{d^4\hat{y}}{dx^4} = -\dfrac{w(x)}{EI}$

$$\Leftrightarrow \frac{d^4\hat{y}}{dx^4} = -\frac{w_0}{EI}\left[r(x-L/2) - r(x-L)\right] + \frac{B}{EI}\delta(x-L) \quad 2$$

$$\Rightarrow \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} = -\frac{w_0}{EI}\left[(x-L/2)r(x-L/2) - (x-L)r(x-L)\right] + \frac{B}{EI}r(x-L) + C_3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = -\frac{w_0}{2EI}\left[(x-L/2)^2 r(x-L/2) - (x-L)^2 r(x-L)\right]$$
$$+ \frac{B}{EI}(x-L)r(x-L) + C_3 x + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{w_0}{6EI}\left[(x-L/2)^3 r(x-L/2) - (x-L)^3 r(x-L)\right]$$
$$+ \frac{B}{2EI}(x-L)^2 r(x-L) + C_3\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_1$$

$$\Rightarrow \hat{y} = -\frac{w_0}{24EI}\left[(x-L/2)^4 r(x-L/2) - (x-L)^4 r(x-L)\right]$$
$$+ \frac{B}{6EI}(x-L)^3 r(x-L) + C_3\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_0 \quad 1$$

Con las condiciones de borde

$\dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0)=0 \Rightarrow C_2 = 0$ $\qquad \hat{y}(0)=0 \Rightarrow C_0 = 0$

$$\frac{d^3\hat{y}}{dx^3}(2L)=0 \Rightarrow -\frac{w_0}{EI}\Big[\underbrace{2L - L/2 - (2L-L)}_{\frac{L}{2}}\Big] + \frac{B}{EI} + C_3 = 0$$

9

$$\Rightarrow C_3 = \frac{w_0 L}{2EI} - \frac{B}{EI} \quad (*) \quad 1$$

$$\underbrace{EI \frac{d^2 y}{dx^2}(2L) = -k \frac{dy}{dx}(2L)}$$

$$\Downarrow$$

$$\left\{ -\frac{w_0}{2EI}\left[(2L-L/2)^2 - (2L-L)^2 \right] + \frac{B}{EI} L + \overbrace{\left(\frac{w_0 L}{2EI} - \frac{B}{EI} \right)}^{C_3} 2L \right\} EI$$

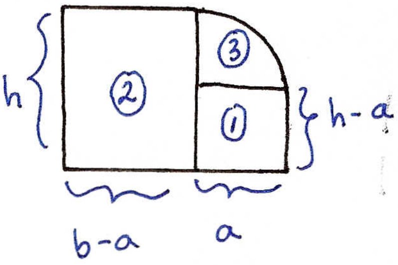
$$= -\left\{ -\frac{w_0}{6EI}\left[(2L-L/2)^3 - (2L-L)^3 \right] + \frac{B}{2EI}(2L-L)^2 + \left(\frac{w_0 L}{2EI} - \frac{B}{EI} \right)\frac{(2L)^2}{2} + C_1 \right\} k$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \frac{3}{8}\frac{w_0 L^2}{EI} - \frac{BL}{EI} \right\} EI = -\left\{ \frac{29}{48}\frac{w_0 L^3}{EI} - \frac{3}{2}\frac{BL^2}{EI} + C_1 \right\} k$$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{29}{48}\frac{w_0 L^3}{EI} + \frac{3}{2}\frac{BL^2}{EI} - \left\{ \frac{3}{8} w_0 L^2 - BL \right\} \frac{1}{k} \quad (**) \quad 1$$

Cálculo de propiedades de área



$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{(h-a)}{2}(h-a)a + \frac{h}{2} h (b-a) + \left(\frac{4a}{3\pi} + h - a \right) \frac{\pi a^2}{4}}{(h-a)a + h(b-a) + \frac{\pi a^2}{4}} \quad 2$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{y} = 4.81826 \text{ cm} = 0.0481826$$

$$I_T = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

$$\bar{I}_1 = \underbrace{I_1}_{\frac{a(h-a)^3}{12}} + a(h-a)(\bar{y} - (h-a)/2)^2 = 186.44 \times 10^{-8}\ m^4$$

$$\bar{I}_2 = \underbrace{I_2}_{\frac{(b-a)h^3}{12}} + (b-a)h(\bar{y} - h/2)^2 = 585,6454 \times 10^{-8}\ m^4$$

$$\bar{I}_3 = \underbrace{I_3}_{\frac{\pi a^4}{16}} + \frac{\pi a^2}{4}\left[\bar{y} - \left(h - a + \frac{4a}{3\pi}\right)\right]^2 = 226,931 \times 10^{-8}\ m^4$$

$$\Rightarrow I_T = 999 \times 10^{-8}\ m^4$$ 2

Luego de ⊛ se tiene $C_3 = 5 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-7} B$ 1

y de ⊛⊛ se obtiene $C_1 = -1.2676 \times 10^{-2} + 1.6012 \times 10^{-5} B$ 1

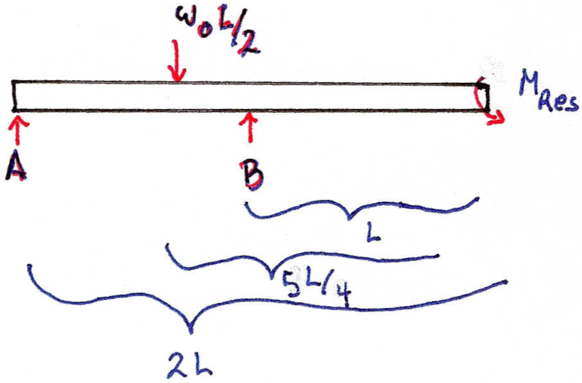
La condición $\hat{y}(L) = 0$ nos queda

$$-\frac{w_0}{24EI}\left[(L - L/2)^4\right] + (5 \times 10^{-4} - 5 \times 10^{-7} B)\frac{L^3}{6} + (-1.2676 \times 10^{-2} + 1.6012 \times 10^{-5} B)L = 0$$

$$\Rightarrow B = 775.573\ N$$ 1

11)

Diagrama cuerpo libre



$$\sum F_y = 0$$

$$\Rightarrow A = w_0 \frac{L}{2} - B$$

$$\Downarrow$$

$$A = 224.427 \text{ N}$$ (1)

$\Downarrow$

M_{Res} se puede calcular de $\sum M_z = 0$ ó calculando $\frac{d\hat{y}}{dx}(2L)$.

Deberian ser aproximadamente iguales

- Del diagrama de cuerpo libre

$$M_{Res} = A\,2L + B\,L - w_0 L^2 \frac{5}{8}$$

$$= -102.292 \text{ Nm}$$

- Usando B, c_1 y c_3

$$c_3 = 0.00011221 35$$
$$c_1 = -2,57525 \times 10^{-4}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\hat{y}}{dx}(2L) \simeq 9.903139 \times 10^{-5} \Rightarrow M_{Res} = -99.03139 \text{ Nm}$$

$\Rightarrow$ o sea son aproximadamente iguales

Se puede comprobar que con $V(0)$ se obtiene en magnitud el mismo valor para la fuerza A