Control 2, Resistencia de Materiales ME3202
2er semestre 2011

Profesor: R. Bustamante

1. (16 puntos) En la Figura 1 tenemos un cilindro de acero que está parcialmente inserto en un tubo de aluminio. En esa zona de longitud l el cilindro y el tubo están perfectamente pegados. En los extremos del conjunto se aplican torques iguales pero opuestos de magnitud T.

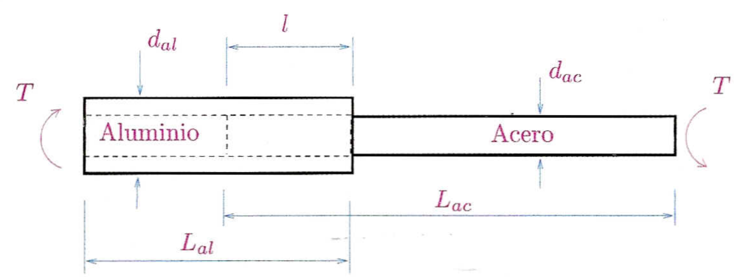


Figura 1: Tubo y cilindro.

   a) Determine T para que el ángulo de torsión entre los extremos sea igual a $7°$.
   b) Determine el máximo valor para T para que el esfuerzo de corte en el tubo no sea mayor a $\tau = 30$MPa.
   c) Determine el máximo valor para T para que el esfuerzo de corte en el cilindro no sea mayor a $\tau = 60$MPa.

   Datos $l = 20$cm

   Acero: $G_{ac} = 75$GPa, $L_{ac} = 90$cm, $d_{ac} = 7$cm

   Aluminio: $G_{al} = 27$GPa, $L_{al} = 70$cm, $d_{al} = 10$cm

2. (20 puntos) En la Figura 2 (lado derecho) tenemos la vista lateral de una viga hecha de dos materiales bajo el efecto de una fuerza uniforme w_o y una puntual F. En el lado izquierdo tenemos una vista de la sección de la viga (ampliada para ver mejor los detalles) en donde se puede apreciar los dos materiales, los cuales están perfectamente pegados.

   Determine el máximo valor para el esfuerzo σ_x y su ubicación.

   Datos: $E_1 = 170$GPa, $E_2 = 100$GPa, $L = 2$m, $h = 10$cm, $e = 3$cm, $b = 10$cm, $w_o = 10$kN/m, $F = 25$kN

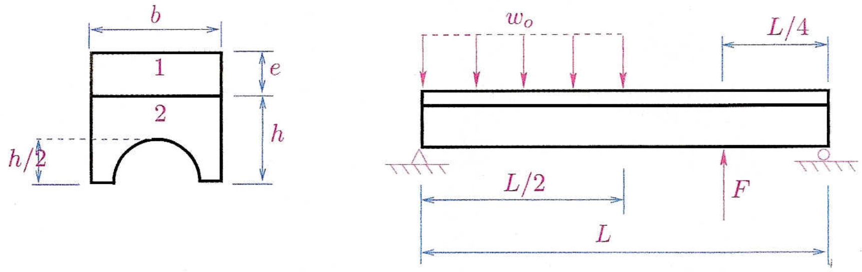


Figura 2: Viga doble en flexión.

3. (25 puntos) En la Figura 3 (lado derecho) tenemos una vista lateral de una viga bajo el efecto de una fuerza $w(x)$, la cual genera una distribución de fuerza interna de corte $V(x)$ que se puede asumir conocida. En la figura del lado izquierdo tenemos una vista (ampliada) de la sección de la viga.

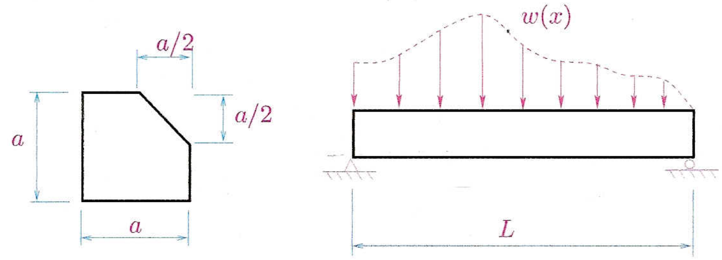


Figura 3: Tubo y cilindro.

Determine la distribución de esfuerzo de corte τ_{xy}.

Formulario

Torsión : $T = \dfrac{\theta G J}{L}, \quad J = \dfrac{\pi D^4}{32}, \quad \tau = \dfrac{Tr}{J},$

Eje de dos materiales concéntricos $T = \dfrac{2\pi\theta}{L}\left[G_1 \dfrac{D_1^4}{64} + \dfrac{G_2}{64}(D_2^4 - D_1^4)\right],$

Flexión : $\sigma_x = -\dfrac{M(x)y}{I_z},$ Eje neutro $\bar{y} = \dfrac{\int_A y' \, \mathrm{d}A}{A},$ Momento de inercia $I_z = \displaystyle\int_A y^2 \, \mathrm{d}A,$

Viga de dos materiales: $\bar{y} = \dfrac{E_1 \int_{A_1} y' \, \mathrm{d}A + E_2 \int_{A_2} y' \, \mathrm{d}A}{E_1 A_1 + E_2 A_2},$

$\sigma_{x_1} = -\dfrac{E_1 M y}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)}, \quad \sigma_{x_2} = -\dfrac{E_2 M y}{(E_1 I_1 + E_2 I_2)}$

Propiedades de área: Eje sección cuadrada $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$ a base, b altura,

Eje sección circular $I_z = \dfrac{\pi d^4}{64}$ d diámetro,

Semicírculo $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$ $I_z = 0{,}1098 r^4$ r radio,

Cuarto de cículo $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{16},$

Triángulo rectángulo $\bar{y} = \dfrac{b}{3}$ $I_z = \dfrac{ab^3}{36}$ a base, b altura,

Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A,$

Deflexión : $\dfrac{d^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} = -\dfrac{w(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d^3\hat{y}}{\mathrm{d}x^3} = -\dfrac{V(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{M(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta(x),$

$\displaystyle\int \delta(x-a) \, \mathrm{d}x = r(x-a), \quad \int r(x-a) \, \mathrm{d}x = (x-a) r(x-a),$

$\displaystyle\int (x-a) r(x-a) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a), \quad \int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x-a)^6 r(x-a),$

Corte en vigas : Sección rectangular $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{2I_z}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right),$

Sección arbitraria $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{I_z t} \displaystyle\int_y^c \xi \, \mathrm{d}A.$

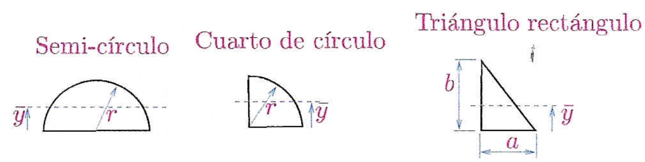
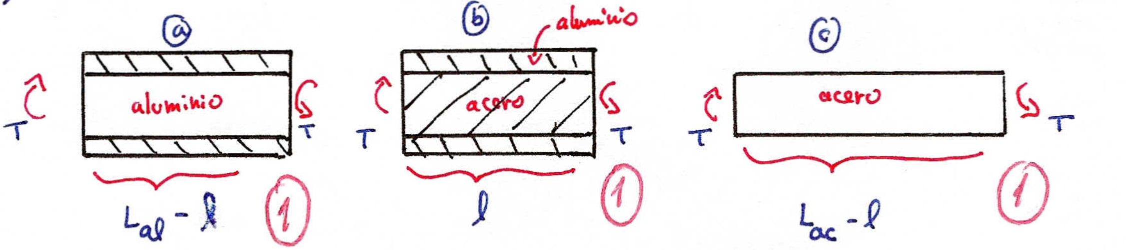


Figura 4: Secciones

Pauta Control

1 a) Se divide el eje completo en 3 partes con cortes imaginarios



$\Delta\theta_T$: cambio ángulo total $\qquad \Delta\theta_T = \Delta\theta_a + \Delta\theta_b + \Delta\theta_c \qquad \Delta\theta_T = 0.122173$ rad

para a $\qquad T = \dfrac{G_{al}\,\Delta\theta_a\, J_a}{L_{al} - l}$ $\qquad \underbrace{\text{tubo de aluminio}}$ $\qquad J_a = \dfrac{\pi}{32}\left(d_{al}^4 - d_{ac}^4\right)$

$$\Rightarrow \Delta\theta_a = \frac{T\,(L_{al} - l)}{G_{al}\,\frac{\pi}{32}\left(d_{al}^4 - d_{ac}^4\right)} \qquad 2$$

para b $\quad$ eje compuesto de dos materiales

$$T = 2\pi\,\frac{\Delta\theta_b}{l}\left[G_{ac}\,\frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64}\left(d_{al}^4 - d_{ac}^4\right)\right]$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_b = \frac{T\,l}{2\pi\left[G_{ac}\,\frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64}\left(d_{al}^4 - d_{ac}^4\right)\right]} \qquad 2$$

para c

$$\Delta\theta_c = \frac{T\,(L_{ac} - l)}{G_{ac}\,\frac{\pi\, d_{ac}^4}{32}} \qquad 1$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_T = T\left\{\frac{L_{al} - l}{G_{al}\,\frac{\pi}{32}\left(d_{al}^4 - d_{ac}^4\right)} + \frac{l}{2\pi\left[G_{ac}\,\frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64}\left(d_{al}^4 - d_{ac}^4\right)\right]} + \frac{L_{ac} - l}{G_{ac}\,\frac{\pi\, d_{ac}^4}{32}}\right\} \qquad 1$$

$\Rightarrow T = 40574.6 \text{ Nm}$ (1)

b) Esfuerzo de corte tubo $\tau = \frac{G\theta r}{L}$

tramo (a)

$$T = G_{al} \frac{\Delta\theta_a}{L_{al} - l} J_a \Rightarrow G_{al} \frac{\Delta\theta_a}{L_{al} - l} = \frac{T}{J_a}$$

$$\Rightarrow \tau_{al_{max}} = \frac{T}{\frac{\pi}{32}(d_{al}^4 - d_{ac}^4)} \frac{d_{al}}{2} \Rightarrow T = 4476 \text{ Nm}$$ (2)

tramo (b)

$$\frac{\Delta\theta_b}{l} = \frac{T}{2\pi\left[G_{ac}\frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64}(d_{al}^4 - d_{ac}^4)\right]}$$

$$\Rightarrow \tau_{al_{max}} = G_{al} \frac{T}{2\pi\left[G_{ac}\frac{d_{ac}^4}{64} + \frac{G_{al}}{64}(d_{al}^4 - d_{ac}^4)\right]} \frac{d_{al}}{2}$$

$$\Rightarrow T = 8404.8 \text{ Nm}$$ (2)

luego se debe aplicar como máximo $T = 4476 \text{ Nm}$

c) tramo (b)

$$\tau_{ac_{max}} = G_{ac} \frac{T}{2\pi\left[G_{ac}\, d_{ac}^4/64 + G_{al}/64\,(d_{al}^4 - d_{ac}^4)\right]} \frac{d_{ac}}{2}$$

$$\Rightarrow T = 8644.9 \text{ Nm}$$ (1)

tramo (c)

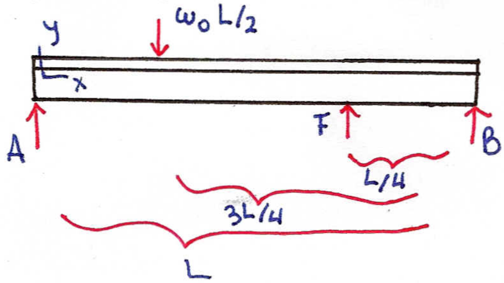
$$T = \tau_{ac_{max}} \frac{\pi d_{ac}^3}{16} = 4040.87 \text{ Nm}$$

$\Rightarrow$ se debe aplicar como máximo $T = 4040.87 \text{ Nm}$ (1)

3| (2) Eje dos materiales $\sigma_{x_1} = - \dfrac{E_1 M(x)\, y}{(E_1 \bar{I}_1 + E_2 \bar{I}_2)}$ $\sigma_{x_2} = - \dfrac{E_2 M(x)\, y}{(E_1 \bar{I}_1 + E_2 \bar{I}_2)}$

• Determinación de $M(x)$

DCL viga completa



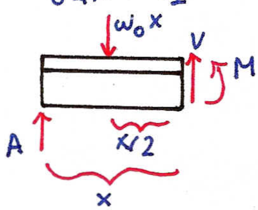
$\sum_B M_z = 0$

$\Rightarrow A = w_0 \dfrac{3L}{8} - \dfrac{F}{4}$

$= 1.25 \text{ kN}$ 1

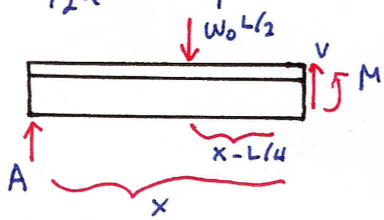
Cortes

$0 < x < L/2$



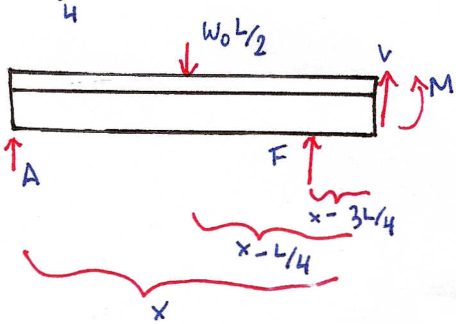
$M(x) = Ax - w_0 \dfrac{x^2}{2} = 1.25\,x - 5x^2$ [kNm] 1

$L/2 < x < 3L/4$



$M(x) = Ax - w_0 \dfrac{L}{2}\left(x - \dfrac{L}{4}\right) = -8.75x + 5$ kNm 1

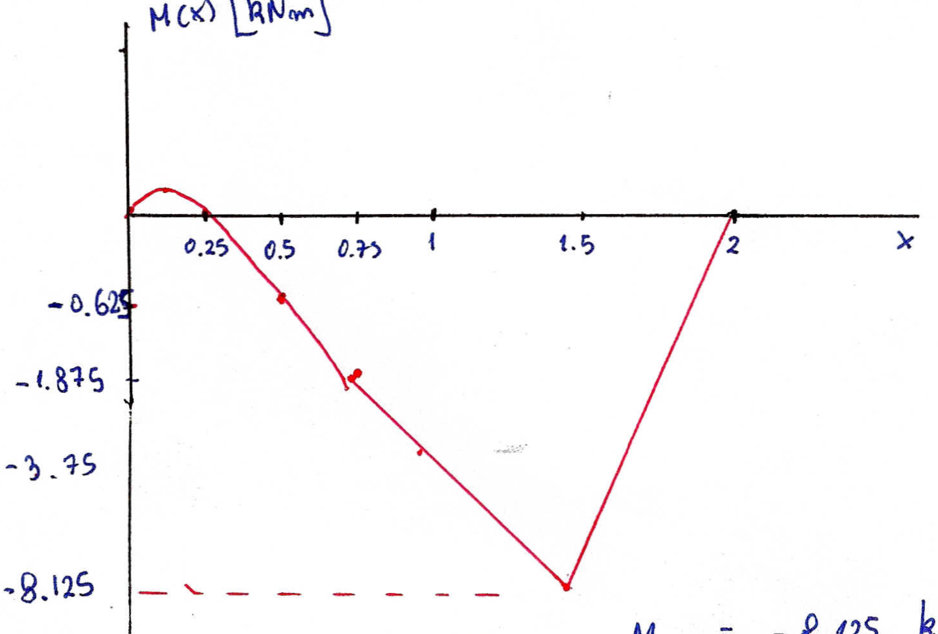
$\dfrac{3L}{4} < x < L$



$M(x) = Ax - w_0 \dfrac{L}{2}\left(x - \dfrac{L}{4}\right) + F\left(x - \dfrac{3L}{4}\right)$

$= 16.25\,x - 32.5$ kNm

1



M_{max} en $x = 1.5$ m $\quad M_{max} = -8.125$ kNm 1

• Cálculo de propiedades de área

$$\bar{y}_{total} = \frac{E_1 A_1 \bar{y}_1 + E_2 A_2 \bar{y}_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

$\bar{y}_1, \bar{y}_2$ desde la base común

$A_1 = be \qquad \bar{y}_1 = h + \frac{e}{2}$ 1

$$\bar{y}_2 = \frac{\frac{h}{2} hb - \frac{4}{3\pi}\frac{h}{2}\frac{\pi}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2}{hb - \frac{\pi}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2}$$ 2

$$A_2 = hb - \frac{\pi}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$A_1 = 0.003\,m^2 \qquad A_2 = 6.073 * 10^{-3}\,m^2 \qquad \bar{y}_1 = 0.115\,m \qquad \bar{y}_2 = 6.8609 * 10^{-2}\,m$

$\Rightarrow \bar{y}_{total} = 8.97845 * 10^{-2}\,m$ 3

5)

$\bar{I}_1, \bar{I}_2$ ← respecto a $\bar{y}_{total}$

$\bar{I}_1 = \delta_1^2 A_1 + I_1$ $\quad \delta_1 = h + \frac{e}{2} - \bar{y}_{total}$ $\quad I_1 = \frac{be^3}{12}$

$\Rightarrow \bar{I}_1 = 2.13246 * 10^{-6}\ m^4$ 2

$\bar{I}_2 = \delta_2^2 A_2 + I_2$ $\quad \delta_2 = \bar{y}_{total} - \bar{y}_2$ $\quad A_2 = hb - \frac{\pi}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2$

3 $\quad I_2 = \bar{I}_{rectángulo} - \bar{I}_{semi\ círculo}$

$\bar{I}_{rectángulo} = \frac{bh^3}{12} + \left(\bar{y}_2 - \frac{h}{2}\right)^2 hb$

$\bar{I}_{semi\ círculo} = 0.1098\left(\frac{h}{2}\right)^4 + \left(\bar{y}_2 - \frac{4}{3\pi}\frac{h}{2}\right)^2 \frac{\pi}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \bar{I}_2 = 5.0145 * 10^{-6}\ m^4$

material 1 $\quad y_{max} = 0.0402\ m$ ← parte superior 1

$\Rightarrow \sigma_{x_{1max}} = \frac{-E_1 M_{max} y_{max}}{E_1 \bar{I}_1 + E_2 \bar{I}_2} = 64.27\ MPa$ 1

↑ tracción

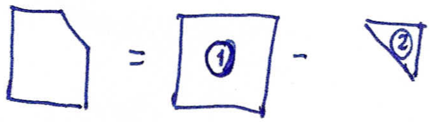
material 2 $\quad y_{max} = -\bar{y}_{total} = -8.97845 * 10^{-2}\ m$ ← parte inferior 1

$\Rightarrow \sigma_{x_{2max}} = \frac{-E_2 M_{max} y_{max}}{E_1 \bar{I}_1 + E_2 \bar{I}_2} = -84{,}436\ MPa$

↑ compresión 1

③ La seccion se asume como compuesta por un cuadrado de lado "a" menos un triangulo rectángulo de lado $a/2$

$$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z t}\int_y^c \xi \, dA$$



1

• Determinar $\bar{y}_{Tot} = \dfrac{\bar{y}_1 A_1 - \bar{y}_2 A_2}{A_1 - A_2}$ 2 $\bar{y}_1 = \dfrac{a}{2}$ $A_1 = a^2$

$\bar{y}_2 = a - \dfrac{1}{3}\dfrac{a}{2} = \dfrac{5a}{6}$ $A_2 = \dfrac{a^2}{8}$

$$\Rightarrow \bar{y}_{tot} = \frac{\frac{a}{2}a^2 - \frac{5a}{6}\frac{a^2}{8}}{a^2 - \frac{a^2}{8}} = a\frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{5}{48}\right)}{\left(1 - \frac{1}{8}\right)} = a\,\frac{19}{48}\cdot\frac{8}{7} = \frac{19}{42}a$$ 1

• Determinar $I_{total} = \bar{I}_1 - \bar{I}_2$ 2

$$\bar{I}_1 = \frac{a^4}{12} + \delta_1^2 a^2 \qquad \delta_1 = \frac{a}{2} - \frac{19}{42}a = \frac{a}{21}$$

$$\Rightarrow \bar{I}_1 = \frac{a^4}{12} + \frac{a^2 * a^2}{21^2} = a^4\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{21^2}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{I}_1 \approx 8.56 * 10^{-2} a^4$$ 1

$$\bar{I}_2 = \frac{\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^3}{36} + \delta_2 \frac{a^2}{8} \qquad \delta_2 = \frac{5}{6}a - \frac{19}{42}a = a\left(\frac{5}{6} - \frac{19}{42}\right) = \frac{8}{21}a$$

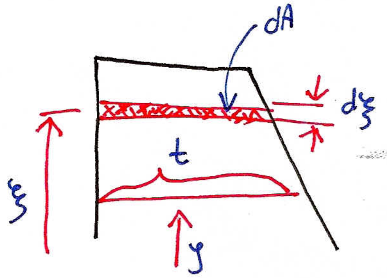
$$\Rightarrow \bar{I}_2 = a^4\left(\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{36} + \left(\frac{8}{21}\right)^2\frac{1}{8}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{I}_2 \approx 1.98767 \times 10^{-2} * a^4$$ 2

$$\Rightarrow I_{total} = 6.5723 * 10^{-2} a^4$$ 1

7)

- caso $\underbrace{\frac{a}{2}-\bar{y}_{tot}}_{\underbrace{\frac{a}{2}-\frac{19}{42}a}_{\frac{a}{21}}} < y < \underbrace{a-\bar{y}_{tot}}_{\underbrace{a-\frac{19}{42}a}_{\frac{23}{42}a = c}}$ 2



es fácil ver que

$$t = -y + a\left(\frac{3}{2}-\frac{19}{42}\right)$$

$$= -y + \frac{22}{21}a \quad 1$$

por otra parte $dA = \left(-\xi + \frac{22}{21}a\right)d\xi$ 1

$$\Rightarrow \int_y^c \xi\, dA = \int_y^{\frac{23}{42}a} \xi\left(-\xi+\frac{22}{21}a\right)d\xi = -\frac{\xi^3}{3} + \frac{11}{21}a\,\xi^2 \Big|_y^{\frac{23}{42}a}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{23}{42}a\right)^3 + \frac{11}{21}a\left(\frac{23}{42}a\right)^2 + \frac{y^3}{3} - \frac{11}{21}a y^2$$

$$\approx 0.10234\, a^3 - \frac{11}{21}a y^2 \quad 2$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{V(x)}{6.5723 * 10^{-2} a^4} \frac{1}{\left(\frac{22}{21}a - y\right)} \left(0.10234\, a^3 - \frac{11}{21}a y^2\right)$$

$$= \frac{V(x)}{6.5723 * 10^{-2} a^3 \left(\frac{22}{21}a - y\right)} \left(0.10234\, a^2 - \frac{11}{21} y^2\right) \quad 2$$

• caso $\underbrace{-\bar{y}_{tot} < y < \frac{a}{2} - \bar{y}_{tot}}$ ⟵ aquí hay que descomponer la integral en dos partes

1

$\Updownarrow$

$$-\frac{19}{42} a < y < \frac{a}{21}$$

$$t = a \qquad dA = \begin{cases} a\, d\xi & y \le \xi \le \frac{a}{21} \\ \left(-\xi + \frac{22}{21} a\right) d\xi & \frac{a}{21} < \xi < \underbrace{\frac{23}{42} a}_{c} \end{cases}$$

2

$$\int_y^c \xi\, dA = \int_y^{a/21} \xi\, dA + \int_{a/21}^{23/42\, a} \xi\, dA$$

$$= \int_y^{a/21} \xi\, a\, d\xi + \int_{a/21}^{23/42\, a} \xi \left(-\xi + \frac{22}{21} a\right) d\xi$$

$$= \frac{\xi^2}{2} a \Big|_y^{a/21} + \left(\frac{(-1)}{3} \xi^3 + \frac{11}{21} a \xi^2\right)\Big|_{a/21}^{\frac{23}{42} a}$$

$$= \frac{a}{2}\left(\frac{a}{21}\right)^2 - \frac{a}{2} y^2 + \frac{(-1)}{3}\left(\frac{23}{42} a\right)^3 + \frac{11}{21} a \left(\frac{23}{42} a\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{a}{21}\right)^3 - \frac{11}{21} a \left(\frac{a}{21}\right)^2$$

2

$$\Rightarrow \int_y^c \xi\, dA \approx a^3 * 0.102324 - \frac{a}{2} y^2$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{V(x)}{6.5723 * 10^{-2} a^4} \frac{1}{a} \left(a^3 * 0.102324 - \frac{a}{2} y^2\right)$$

$$= \frac{V(x)}{6.5723 * 10^{-2} a^4} \left(a^2 * 0.102324 - y^2/2\right)$$

2