Control 2, Resistencia de Materiales ME3202, ME46A
2do semestre 2010

Profesor: R. Bustamante

1. En la Figura 1 se tiene un cilindro cónico de diámetros D, d que está pegado a un cilindro recto de diámetro d. Ambos están empotrados a paredes rígidas. Los cilindros están hechos de materiales distintos con módulos de corte G_1, G_2, respectivamente. Determine las reacciones en las paredes y el máximo esfuerzo de corte por torsión. (20 puntos)

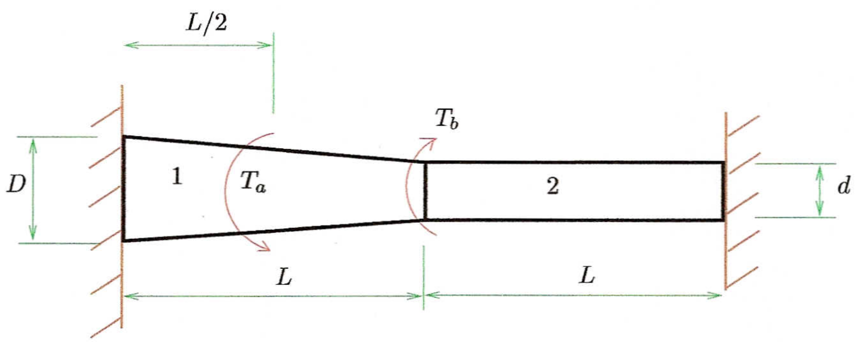


Figura 1: Cilindros pegados a paredes rígidas.

Datos:

$$D = 10[\text{cm}], \quad d = 6[\text{cm}], \quad L = 40[\text{cm}], \quad T_a = 500[\text{Nm}], \quad T_b = 300[\text{Nm}],$$
$$G_1 = 50[\text{GPa}], \quad G_2 = 60[\text{GPa}].$$

2. La viga de la Figura 2 se encuentra apoyada en tres soportes flexibles, donde estos tres soportes se pueden modelar como resortes de constante $k = 1000[\text{N/mm}]$. La viga está bajo

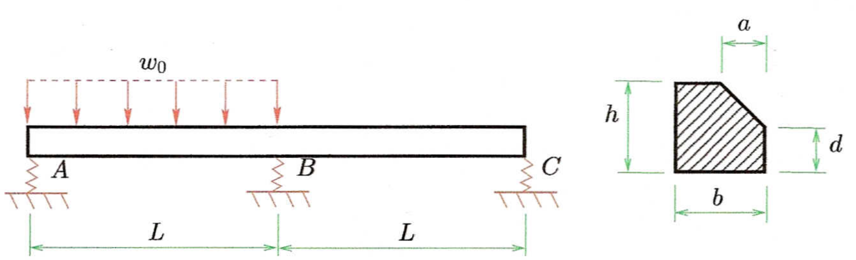


Figura 2: Viga con tres soportes.

la acción de una fuerza uniforme $w_0 = 1000\text{N/m}$ y su sección se muestra en el lado derecho de la figura (de forma ampliada). Determine las reacciones en los soportes. (30 puntos)

Datos:

$$L = 1[\text{m}], \quad a = 5[\text{cm}], \quad d = 3[\text{cm}], \quad b = 8[\text{cm}], \quad h = 9[\text{cm}], \quad E = 190[\text{GPa}].$$

3. La Figura 3 muestra una viga que está sometida a una fuerza por unidad de línea uniforme $w_0 = 500\text{N/m}$. La sección se muestra en el lado derecho. Determine la distribución de esfuerzo τ_{xy} para este problema así como su valor máximo. (20 puntos)

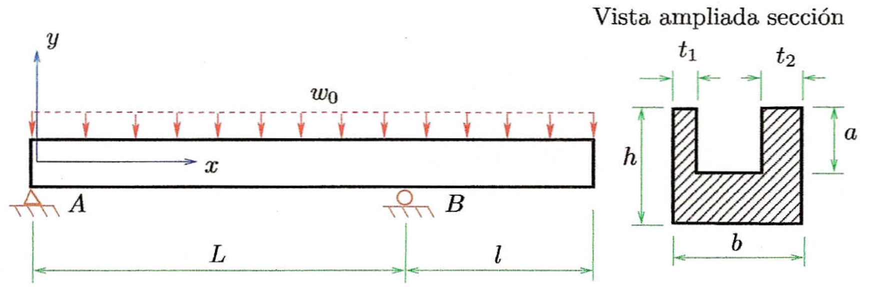


Figura 3: Viga bajo fuerza uniforme.

Datos:

$L = 2[\text{m}]$, $l = 50[\text{cm}]$, $h = 7[\text{cm}]$, $a = 3[\text{cm}]$, $b = 8[\text{cm}]$, $t_1 = 1[\text{cm}]$, $t_2 = 2[\text{cm}]$, $E = 200[\text{GPa}]$, $G = 90[\text{GPa}]$.

Formulario

Torsión : $T = \dfrac{\theta G J}{L}$, $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$, $\tau = \dfrac{Tr}{J}$,

Flexión : $\sigma_x = \dfrac{M(x)y}{I_z}$, Eje neutro $\bar{y} = \dfrac{\int_A y' \, \mathrm{d}A}{A}$, Momento de inercia $I_z = \displaystyle\int_A y^2 \, \mathrm{d}A$,

Eje sección cuadrada $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$ a base, b altura, Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A$,

Deflexión : $\dfrac{d^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} = -\dfrac{w(x)}{EI_z}$, $\dfrac{d^3\hat{y}}{\mathrm{d}x^3} = -\dfrac{V(x)}{EI_z}$, $\dfrac{d^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{M(x)}{EI_z}$, $\dfrac{d\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta(x)$,

$\displaystyle\int \delta(x-a) \, \mathrm{d}x = r(x-a)$, $\displaystyle\int r(x-a) \, \mathrm{d}x = (x-a)r(x-a)$,

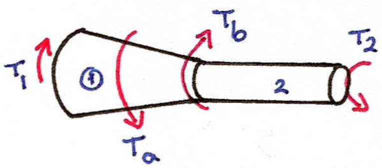
$\displaystyle\int (x-a)r(x-a) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)$, $\displaystyle\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x-a) r(x-a)$,

Corte en vigas : Sección rectangular $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{2I_z}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)$,

Sección arbitraria $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{I_z t} \displaystyle\int_y^c \xi \, \mathrm{d}A$.

Pauta Control 2

1) DCL



T_1, T_2 torques

reacción pared

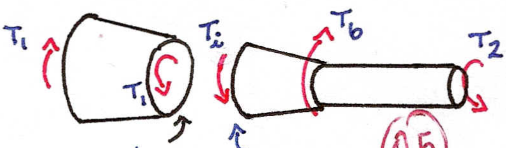
Equilibrio

$\Downarrow$

$T_1 - T_2 + T_b - T_a = 0$

$\Rightarrow T_1 = T_a - T_b + T_2$ (*) 0.5

Corte imaginario



antes de T_a

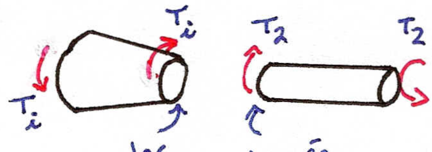
después de T_a

0.5

equilibrio $T_i = T_b - T_2$ (**)

(a)

$\Rightarrow$ otro corte imaginario adicional



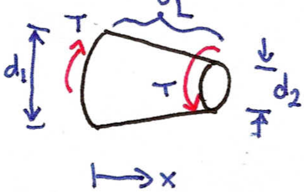
antes de T_b

después de T_b

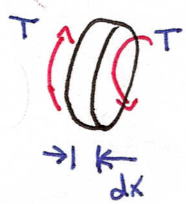
0.5

(b) (c)

torsión eje cónico $\Rightarrow$ formula general



$\Rightarrow$ elemento diferencial dirección x



luego

$$d\theta = \frac{T\,dx}{GJ} \quad (*) \quad 2$$

$d\theta$: cambio infinitesimal de θ; L

pero $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$

y $D = d_1 - (d_1 - d_2)\dfrac{x}{L}$ 0.5

$$\text{de } (*) \Rightarrow \int d\theta = \int \frac{T}{GJ}\,dx \Rightarrow \theta = \frac{32}{\pi}\frac{T}{G}\int_0^L \frac{dx}{\left[d_1 - (d_1-d_2)\frac{x}{L}\right]^4} \quad 2$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{32\,T\,L}{3\pi G (d_1 - d_2)}\left(\frac{1}{d_2^3} - \frac{1}{d_1^3}\right) \quad 2$$

Ángulo parte (a)

$T = T_1 \quad d_1 = D \quad d_2 = \frac{1}{2}(D+d) \qquad L/2$ (en lugar de L)

$$\Rightarrow \Delta\theta_a = \frac{32\,T_1\,L/2}{3\pi G_1\left[D - \frac{1}{2}(D+d)\right]}\left(\frac{1}{\left[\frac{1}{2}(D+d)\right]^3} - \frac{1}{D^3}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_a = 6.4723 \times 10^{-7}\,T_1 \quad 2$$

Ángulo parte (b) $\left\{ \begin{array}{l} T = T_i \quad d_1 = \frac{1}{2}(D+d) \quad d_2 = d \quad L/2 \\ \Rightarrow \Delta\theta_b = \dfrac{32\, T_i\, L/2}{3\pi G_1 \left[\frac{1}{2}(D+d) - d\right]} \left\{ \dfrac{1}{d^3} - \dfrac{1}{\left[\frac{1}{2}(D+d)\right]^3} \right\} \end{array} \right.$

2

$\Rightarrow \quad \Delta\theta_b = 1.8175 \times 10^{-6}\, T_i$

Ángulo parte (c) $\quad \Delta\theta_c = \dfrac{T_2 L}{G_2 \frac{\pi d^4}{32}} = 5.2397 \times 10^{-6}\, T_2$ 1

ambos extremos están empotrados, luego

$\Delta\theta_a - \Delta\theta_b + \Delta\theta_c = 0 \quad$ ← ángulo torsión final es cero 2

$\Leftrightarrow \quad 6.4723 \times 10^{-7}\, T_1 - 1.8175 \times 10^{-6}\, T_i + 5.2397 \times 10^{-6}\, T_2 = 0$

de ⊛ y ⊛⊛ se tiene

$$6.4723\times10^{-7}(T_a - T_b) + 6.4723\times10^{-7}\,T_2 + 1.8175\times10^{-6}\,T_2 - 1.8175\times10^{-6}\,T_b$$
$$+\,5.2397\times10^{-6}\,T_2 = 0$$

1

$\Rightarrow T_2 = 54$ Nm 1 $\quad \Rightarrow \quad T_1 = 254$ Nm 1

y $\quad T_i = 246$ Nm ← positivo ✓

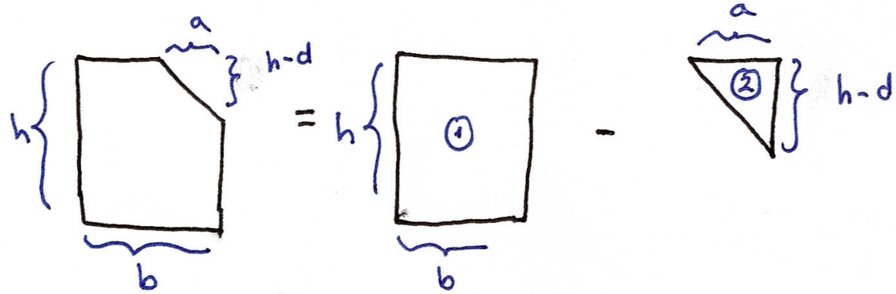
$\tau = \dfrac{Tr}{J}$ } (a) $\tau = \dfrac{T_1\, d(x)/2}{\frac{\pi d(x)^4}{32}} = \dfrac{16}{\pi}\dfrac{T_1}{d(x)^3}$ $\Big\}$ máximo $d(x = L/2) = \dfrac{D+d}{2}$ 1 $\Rightarrow \tau_{max} = 2.5266$ MPa

(b) $\tau = \dfrac{16}{\pi}\dfrac{T_i}{d(x)^3}$ $\Big\}$ máximo $d(x=L) = d$ $\quad \Rightarrow \tau_{max} = 5.8003$ MPa 1

(c) $\tau_{max} = \dfrac{16}{\pi}\dfrac{T_2}{d^3} = 1{,}2732$ MPa

3

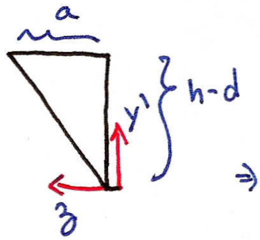
2) Cálculo propiedades do área



0.5

① $\bar{y}_1 = h/2 \qquad I_1 = \dfrac{bh^3}{12}$

②



$z = \dfrac{a}{(h-d)}\,y' \qquad \bar{y}_2 = \dfrac{\int y'\,dA}{A} = \dfrac{\int_0^{h-d} y' z\,dy'}{\frac{a}{2}(h-d)}$

$\Rightarrow \bar{y}_2 = \frac{2}{3}(h-d)$ 1

$I_2 = \int y^2\,dA$ ↑ respecto a $\bar{y}_2$ pero $y' = y + \bar{y}_2 \Rightarrow y = y' - \bar{y}_2$

$\Rightarrow I_2 = \int_0^{h-d} (y' - \bar{y}_2)^2 \dfrac{a}{h-d}\,y'\,dy' = \dfrac{a}{36}(h-d)^3$ 1

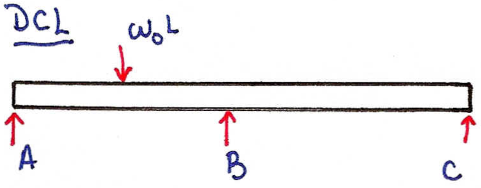
total $\bar{Y}_{total} = \dfrac{\bar{Y}_1 A_1 - \bar{Y}_2 A_2}{A_1 - A_2} = \dfrac{\frac{h}{2}\,hb - \left(d + \frac{2}{3}(h-d)\right)\frac{a}{2}(h-d)}{hb - \frac{a}{2}(h-d)}$

$= 3.842$ cm 1

$I_{total} = I_1 + \left(\frac{h}{2} - \bar{Y}_{total}\right)^2 hb - \left[I_2 + \left(d + \frac{2}{3}(h-d) - \bar{Y}_{total}\right)^2 \frac{a}{2}(h-d)\right]$

$= 337{,}5789\ cm^4 = 3{,}3758 \times 10^{-6}\ m^4$ 1

DCL

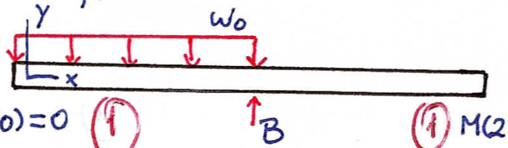


$\sum F_y = 0 \Rightarrow A + B + C = w_0 L$

$\underbrace{\sum_A M_z = 0 \Rightarrow BL + C\,2L = w_0 \frac{L^2}{2}}$

$\Rightarrow \underbrace{C = -\frac{B}{2} + w_0 \frac{L}{4} \qquad A = \frac{3}{4} w_0 L - \frac{B}{2}}_{\text{Dependen de } B}$ 1

Deflexión



$M(0) = 0$ 1 $\qquad$ 1 $M(2L) = 0$ ← resorte no hace momento en A, C

Resorte $\qquad$ Resorte

$V(0) = -A$ 1 $\qquad$ 1 $V(2L) = C$

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^4} = -\frac{w(x)}{EI} = -\frac{1}{EI}\left\{ w_0 \left[r(x) - r(x-L) \right] - B\,\delta(x-L) \right\}$$ 1

$$\Rightarrow \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{1}{EI}\left\{ w_0 \left[x\,r(x) - (x-L)\,r(x-L) \right] - B\,r(x-L) \right\} + C_3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{1}{EI}\left\{ \frac{w_0}{2} \left[x^2 r(x) - (x-L)^2 r(x-L) \right] - B(x-L)\,r(x-L) \right\} + C_3 x + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{1}{EI}\left\{ \frac{w_0}{6} \left[x^3 r(x) - (x-L)^3 r(x-L) \right] - \frac{B}{2}(x-L)^2 r(x-L) \right\} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_1$$

$$\Rightarrow \hat{y} = -\frac{1}{EI}\left\{ \frac{w_0}{24} \left[x^4 r(x) - (x-L)^4 r(x-L) \right] - \frac{B}{6}(x-L)^3 r(x-L) \right\}$$ 1

$$+ C_3 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_0$$

Condiciones de Borde

$M(0) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(0) = 0$ 0.5 $\qquad M(2L) = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2}(2L) = 0$ 0.5

$V(0) = -A \Leftrightarrow -EI \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3}(0) = k\hat{y}(0)$ 2

resortes $\begin{cases} A = -k\hat{y}(0) \\ C = -k\hat{y}(2L) \end{cases}$

$V(2L) = C$

$\Updownarrow$

$EI \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3}(2L) = k\hat{y}(2L)$ 2

5| Luego con el uso de las condiciones de borde

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \qquad -EI\frac{d^3\hat{y}}{dx^3}(0) = k\hat{y}(0) \Rightarrow -EI\, C_3 = k\, C_0 \quad 1$$

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(2L) = 0 \Rightarrow 2L\,C_3 = \frac{1}{EI}\left(\frac{w_0}{2}3L^2 - BL\right) \Rightarrow C_3 = 1.1693\times10^{-3} - 7.7954\times10^{-7}B$$

$$\Rightarrow C_0 = -7.5\times10^{-4} + 5\times10^{-7}B \quad 1$$

$$EI\frac{d^3\hat{y}}{dx^3}(2L) = k\hat{y}(2L) \Rightarrow -w_0[2L-(2L-L)] + B + EI\,C_3 =$$

$$= k\left\{\frac{-1}{EI}\left[\frac{w_0}{24}\left[(2L)^4 - L^4\right] - \frac{B}{6}L^3\right] + C_3\frac{(2L)^3}{6} + C_1 2L + C_0\right\} \quad 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 499.397 + 0.000781024B - 2000\, C_1 = 0$$

$$\Rightarrow C_1 = -4.23284\times10^{-5} + 3.89771\times10^{-7}\, B \quad 1.5$$

Para encontrar B se usa $B = -k\,\hat{y}(L)$ resorte en B 2

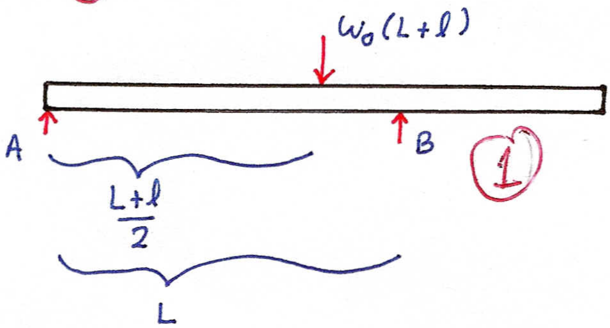
$$\Rightarrow B = -k\left\{-\frac{1}{EI}\left[\frac{w_0}{24}(L^4)\right] + C_3\frac{L^3}{6} + C_1 L + C_0\right\} \quad 1$$

$$\Rightarrow B = 376.399 \text{ N} \quad 2$$

$$\Rightarrow C = 61.8005 \text{ N} \quad 2 \qquad A = 561.801 \text{ N} \quad 2$$

3) $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{It} \displaystyle\int_y^c \xi \, dA$ 1

Cálculo $V(x)$ DCL



1

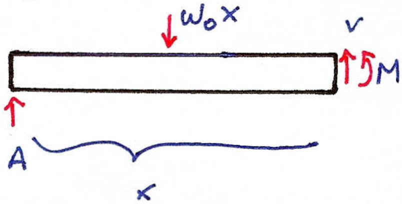
$\underbrace{\Sigma F_y = 0 \quad \underset{A}{\Sigma} M_z = 0}$

$\Downarrow$

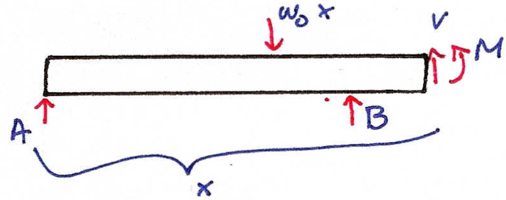
$B = \dfrac{w_0 (L+\ell)^2}{2L} = 781.25$ N

$A = w_0 (L+\ell) - B = 468.75$ N

$0 < x < L$



$L < x < L+\ell$



$V(x) = w_0 x - A$ 0.5

$\Rightarrow V(x) = 500x - 468.75$

$V(x) = w_0 x - A - B$

$\Rightarrow V(x) = 500x - 1250$ 0.5

funciones lineales $\Rightarrow$ máximo están en los extremos

evaluar

$V(0) = -468.75$

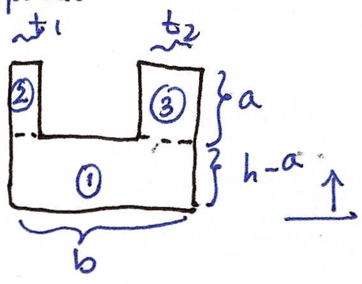
$V(L^-) = 531.25$

$V(L^+) = -250$

$V(L+\ell) = 0$

máximo en $x = L$ por la izquierda 1

Propiedades de área



$$\bar{y} = \frac{\frac{(h-a)}{2} b(h-a) + \left[h-a+\frac{a}{2}\right] a t_1 + \left[h-a+\frac{a}{2}\right] t_2 a}{b(h-a) + a t_1 + a t_2}$$

$= 2.7683$ cm 1

7)

$$I_{tot} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3$$

$$\bar{I}_1 = \underbrace{I_1}_{\frac{b(h-a)^3}{12}} + \left[\frac{(h-a)}{2} - \bar{y}_{tot}\right]^2 b(h-a) = 61{,}555 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_2 = \underbrace{I_2}_{\frac{t_1 a^3}{12}} + \left[h-a+\frac{a}{2} - \bar{y}_{tot}\right]^2 t_1 a = 24.6366 \text{ cm}^4$$

$$\bar{I}_3 = \underbrace{I_3}_{\frac{t_2 a^3}{12}} + \left[h-a+\frac{a}{2} - \bar{y}_{tot}\right]^2 t_2 a = 49.2731 \text{ cm}^4$$

$$\Rightarrow I_{tot} = 135.4647 \text{ cm}^4$$

$$= 1.35465 \times 10^{-6} \text{ m}^4$$

1

Integral $\underbrace{\int_y^c \xi \, dA}$ ξ dese eje neutro $\bar{y}$

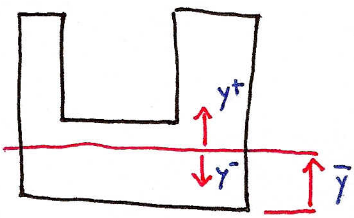
se tiene

$$c = h - \bar{y} = 4.2317 \text{ cm}$$ 1

caso $\underbrace{-\bar{y} < y < h-a-\bar{y}}$

$$-2.7683 < y < 1{,}2317 \text{ cm}$$

$$dA = b \, d\xi$$ 1



caso $h-a-\bar{y} < y < c$

$$dA = (t_1 + t_2) \, d\xi$$ 1

Luego $-\bar{y} < y < h-a-\bar{y}$

$$\Rightarrow \int_y^c \xi \, dA = \int_y^{h-a-\bar{y}} \xi \, b \, d\xi + \int_{h-a-\bar{y}}^{c} \xi \, (t_1+t_2) \, d\xi$$

$$= \frac{b}{2}\left[(h-a-\bar{y})^2 - y^2\right] + \frac{(t_1+t_2)}{2}\left[c^2 - (h-a-\bar{y})^2\right]$$

$$= 30.6536 - 4y^2 \text{ cm}^3$$ 2

$$= 10^{-6}(30.6536 - 4y^2) \text{ m}^3$$

Para $h-a-\bar{y} < y < c$

$$\int_y^c \xi \, dA = \int_y^c (t_1+t_2)\,\xi \, d\xi = \frac{(t_1+t_2)}{2}\left[c^2-y^2\right]$$

$$= 26.860927 - \frac{3}{2}y^2 \ \text{cm}^3$$

2 $$= 10^{-6}\left(26.860927 - \frac{3}{2}y^2\right) \ \text{m}^3$$

Luego

3 $$\tau_{xy} = \frac{V(x)}{I}\begin{cases} \frac{10^{-6}}{b}\left(30.6536 - 4y^2\right) & -2.7683 < y < 1.2317 \text{ cm} \\ \frac{10^{-6}}{t_1+t_2}\left(26.860927 - \frac{3}{2}y^2\right) & 1.2317 < y < 4.2317 \text{ cm} \end{cases}$$

máximo $V_{max} = 531.25$ $x = 2$ m por la izquierda

$y = 0$ $\tau_{xy} = 150196$ Pa 2

$y \to 1.2317^+$ $\tau_{xy} = 321385.36$ Pa 2