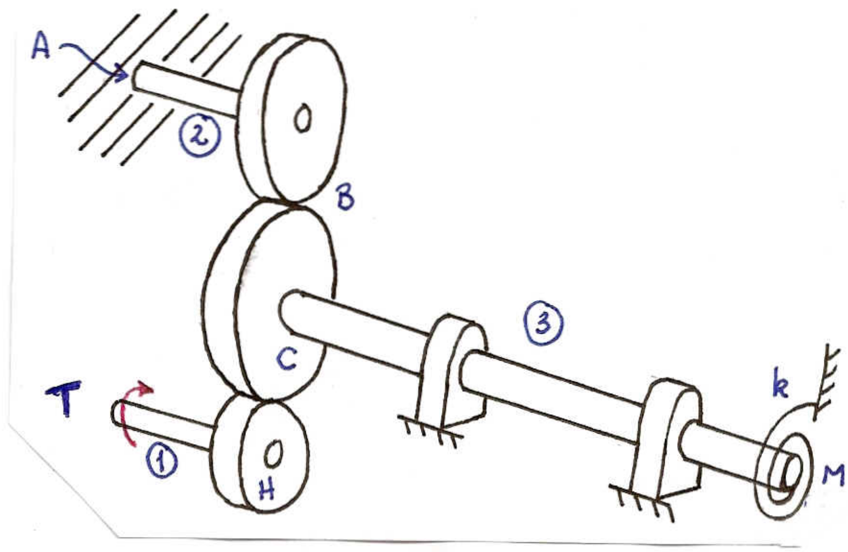
fcfm Ingeniería Mecánica FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 2. Resistencia de Materiales ME3202-1 46A-2.

07/10/2009

Profesor: R. Bustamante

1) Los tres ejes *1*, *2* y *3* están conectados a los engranajes ***H***, ***B*** y ***C***, respectivamente. El eje *1* está sometido a un torque ***T*** en el extremo izquierdo. El eje *3* está conectado a un resorte en espiral de constante ***k*** en el punto ***M***. El torque causado por el resorte en espiral es ***k*** veces el cambio total en el ángulo del eje en ***M***. El eje *2* está empotrado a una pared rígida. Determine el ángulo total en ***M*** y el máximo esfuerzo de corte por torsión en los ejes 2 y 3. (20 puntos)

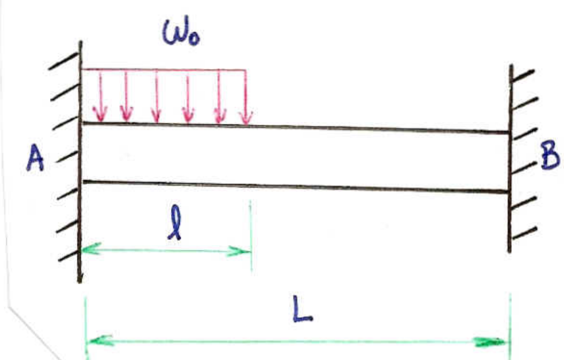


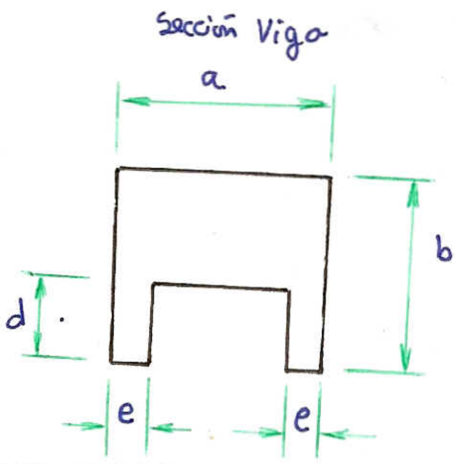
Datos

Diámetros de engranajes *H*, *C* y *B*:	$D_H = 8$ cm	$D_C = 20$ cm	$D_B = 10$ cm
Largos de ejes *2* y *3*:	$L_2 = 20$ cm	$L_3 = 1$ m	
Diámetros de ejes *2* y *3*:	$d_2 = 3$ cm	$d_3 = 3.5$ cm	
	$k = 5000$ Nm/rad		
Módulo de corte ejes *2* y *3*:	$G = 36$ GPa		
	$T = 10^4$ Nm		

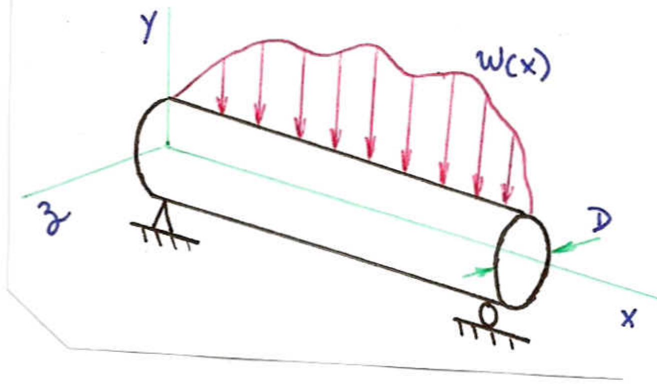
2) La viga de la figura está empotrada en *A* y *B*, su sección transversal se muestra en el lado derecho:
   a) Calcule el eje neutro. (5 puntos)
   b) Determine I_z para la sección. (5 puntos)
   c) Determine las reacciones en *A* y *B*. (15 puntos)
   d) Encuentre el valor y la posición del máximo esfuerzo de tracción/compresión por flexión. (15 puntos)

Datos: L = 2 m, l = 80 cm, w_o = 5000N/m, a = 7 cm, b = 6 cm, d = 2 cm, e = 1 cm, módulo de elasticidad E = 120 GPa





3) Para el eje macizo de sección circular y de diámetro ***D*** de la figura determine una expresión para el esfuerzo de corte τ_{xy} causado por la distribución de fuerza interna de corte $V(x)$.
(10 puntos)



Formulario

Torsión $T = \dfrac{\theta G J}{L}$ Sección circular $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$ $\tau = \dfrac{Tr}{J}$

Sección rectangular $J = k_2 a b^3$ $\tau = \dfrac{T}{k_1 a b^2}$ $b \le a$

a/b	1	1.5	2	4	10	∞
k_1	0.208	0.231	0.246	0.282	0.312	1/3
k_2	0.141	0.196	0.281	0.281	0.312	1/3

Flexión

Método área de momento $\Delta_{AB} = \displaystyle\int_A^B x' \frac{M}{EI}\, dx$

Esfuerzo $\sigma_x = -\dfrac{M(x)}{I_z} y$

Momento inercia de área y eje neutro

Caso general Eje neutro $\displaystyle\int_A y\,dA = 0$ momento inercia $I_z = \displaystyle\int_A y^2 dA$

Sección rectangular $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$ ***a*** : base ***b***: altura

Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$

Ecuación de la elástica

$\hat{y}$: Deflexión vertical de la viga

$$\frac{d^4 \hat{y}}{dx^2} = -\frac{w(x)}{EI} \quad \frac{d^3 \hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI} \quad \frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{d\hat{y}}{dx} \approx \theta(x)$$

$$\int \delta(x-a)dx = r(x-a)$$

$$\int r(x-a)dx = (x-a)r(x-a)$$

$$\int (x-a)r(x-a)dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)$$

$$\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a)$$

Corte en vigas

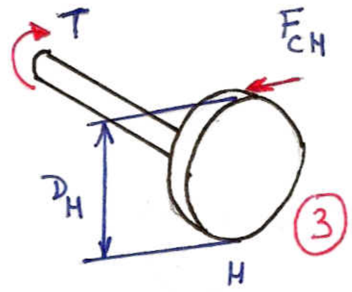
Sección rectangular: $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{2I_z}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right)$

Sección arbitraria: $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{I_z t}\displaystyle\int_y^c \xi\, dA$

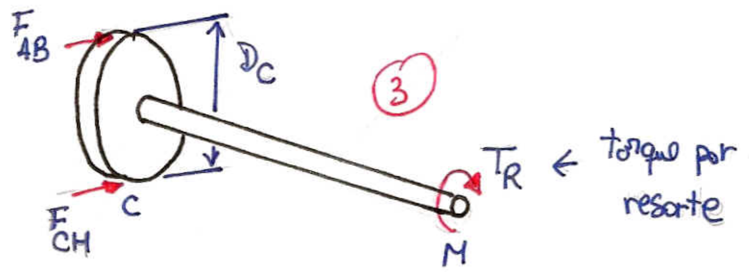
Pauta control

1)

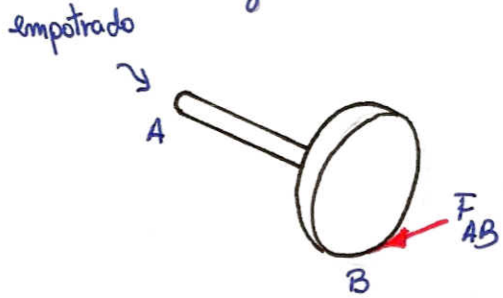
eje 1



eje 3



eje 2



Equilibrio torque eje 1 $\quad T = \frac{D_H}{2} F_{CH}$

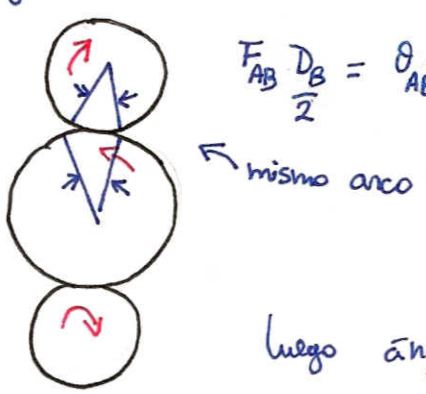
$$\Rightarrow F_{CH} = \frac{2T}{D_H} \quad (1)$$

Equilibrio torque eje 3

$$T_R + F_{AB}\frac{D_C}{2} = F_{CH}\frac{D_C}{2} = \frac{D_C T}{D_H}$$

$$\Rightarrow T_R + F_{AB}\frac{D_C}{2} = \frac{D_C T}{D_H} \quad (*) \quad (2)$$

Vista frontal engranajes



$$F_{AB}\frac{D_B}{2} = \theta_{AB}\frac{G J_{AB}}{L_2} \quad (1) \qquad J_{AB} = \frac{\pi d_2^4}{32} \doteq 7.95216 \times 10^{-8}\ m^4$$

$$\theta_{AB} D_B = \theta_C D_C \Rightarrow \theta_{AB} = \theta_C \frac{D_C}{D_B} \quad (**) \quad (2)$$

luego ángulo en M (total) → $\theta_M + \theta_{CM} = \theta_C$ $(***)$ (2)

además $\theta_{CM} = \frac{T_R L_3}{G J_{CM}}$ (1) $\quad J_{CM} = \frac{\pi d_3^4}{32} = 1.47323 \times 10^{-7} m^4$ y $T_R = \theta_M k$

eje 3 ↗ $\qquad$ ↑ resorte

reemplazando en (*) usando (**), (***) y la expresión para θ_{CM} se obtiene

$$\theta_M k + \frac{D_C}{2}\frac{2 G J_{AB}}{D_B L_2}\frac{D_C}{D_B}\left(\theta_M + \frac{\theta_M k L_3}{G J_{CM}}\right) = \frac{D_C}{D_H} T$$

$$\Rightarrow \theta_M = 0.21508\ \text{rad} \Leftrightarrow \theta_M = 12.323° \quad (1)$$

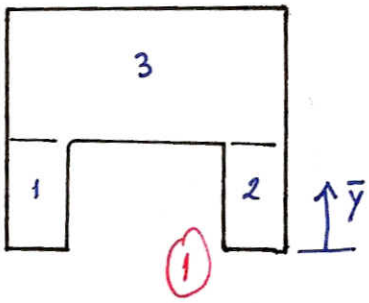
$\boxed{2}$

$$\underset{\text{eje } 2}{\tau_{max}} = F_{AB} \frac{D_B}{2} \frac{d_2}{2 J_{AB}} \qquad \underset{\text{eje } 3}{\tau_{max}} = T_R \frac{d_3}{2 J_{CM}}$$

con θ_M se tiene $T_R = 1075.4$ Nm $\Rightarrow \underset{\text{eje } 3}{\tau_{max}} = 12.774312$ MPa 2

de ⊛ $\Rightarrow F_{AB} = 239246$ N $\Rightarrow \underset{\text{eje } 2}{\tau_{max}} = 2256,4247$ MPa 2

2) a)



$\bar{y}_1 = \frac{d}{2} = \bar{y}_2$ 1 $\quad A_1 = de = A_2$

$\bar{y}_3 = \frac{1}{2}(b+d)$ 1 $\quad A_3 = a(b-d)$

$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = 0.03625\,m$$ 2

$= 3.625$ cm

b) $I_1 = I_2 = \frac{ed^3}{12}$ ← respecto a su propio eje 1

$I_1' = I_2' = (\bar{y} - d/2)^2 de + \frac{ed^3}{12}$ ← respecto a eje neutro $\bar{y}$ 1

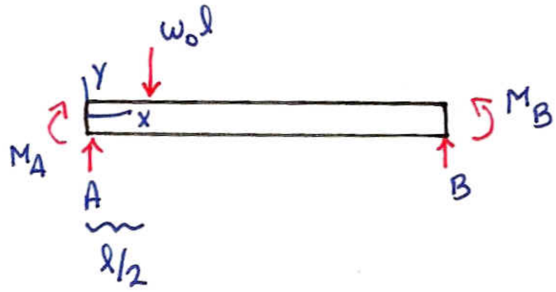
$= 1.44479 \times 10^{-7}\, m^4$ 1

$I_3 = a\frac{(b-d)^3}{12}$

$I_3' = \left[\frac{1}{2}(b+d) - \bar{y}\right]^2 a(b-d) + a\frac{(b-d)^3}{12} = 4.12708 \times 10^{-7}\, m^4$ 1

$\Rightarrow I_T = I_1' + I_2' + I_3' = 7.01666 \times 10^{-7}\, m^4$ 1

c)



equilibrio 1

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_y = 0 \Rightarrow A + B = w_0 l \\ \underset{A}{\Sigma M} \circlearrowright = 0 \Rightarrow M_B - M_A + BL - w_0 \frac{l^2}{2} = 0 \end{array}\right\}$$ 1

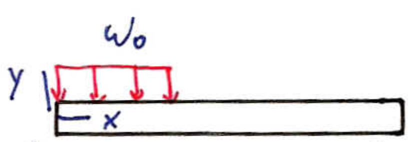
$\underbrace{\text{2 ecuaciones y 4 incognitas } A, B, M_A, M_B}$

⇓

hiperestático

⇓

ecuación de la elástica



$\hat{y}(0) = 0 \qquad \hat{y}(L) = 0$

$\frac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0$ 1 $\qquad \frac{d\hat{y}}{dx}(L) = 0$ ← empotrado 1

4

Resolver $\dfrac{d^4\hat{y}}{dx^2} = -\dfrac{w(x)}{EI_T}$ en este caso $w(x) = w_0(1 - r(x-\ell))$

$$\Rightarrow \frac{d^4\hat{y}}{dx^2} = \frac{-w_0}{EI_T}\left[1 - r(x-\ell)\right] \quad 1$$

$$\Rightarrow \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} = \frac{-w_0}{EI_T}\left[x - (x-\ell)r(x-\ell)\right] + \alpha_3$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = \frac{-w_0}{2EI_T}\left[x^2 - (x-\ell)^2 r(x-\ell)\right] + \alpha_3 x + \alpha_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = \frac{-w_0}{6EI_T}\left[x^3 - (x-\ell)^3 r(x-\ell)\right] + \alpha_3\frac{x^2}{2} + \alpha_2 x + \alpha_1$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \frac{-w_0}{24EI_T}\left[x^4 - (x-\ell)^4 r(x-\ell)\right] + \alpha_3\frac{x^3}{6} + \alpha_2\frac{x^2}{2} + \alpha_1 x + \alpha_0 \quad 1$$

pero $\dfrac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ 1 $\quad \hat{y}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$ 1

$$\frac{d\hat{y}}{dx}(L) = 0 \Rightarrow \frac{-w_0}{6EI_T}\left[L^3 - (L-\ell)^3\right] + \alpha_3\frac{L^2}{2} + \alpha_2 L = 0$$

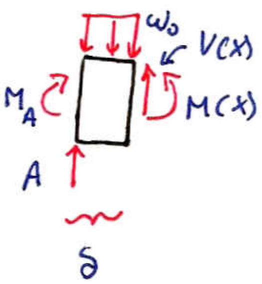
$$\Rightarrow \alpha_2 = 3.10372\times10^{-2} - \alpha_3 \quad 1$$

$$\hat{y}(L) = 0 \Rightarrow \frac{-w_0}{24EI_T}\left[L^4 - (L-\ell)^4\right] + \alpha_3\frac{L^3}{6} + (3.10372\times10^{-2} - \alpha_3)\frac{L^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 4.142509\times10^{-2}\ \frac{1}{m^2} \quad 1$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = -0.01038789\ \frac{1}{m} \quad 1$$

momento y fuerza A



Cuando $\delta \to 0$

$\Rightarrow M_A = M(0)$ 1

$A = -V(0)$ 1

$M(x) = EI_T \dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}(x)$

$\Rightarrow M(0) = EI_T\,\alpha_2 = -874.6595$ Nm

$\Rightarrow M_A = -874.6595$ Nm

$V(x) = -EI_T \dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3}(x)$

$\Rightarrow V(0) = -EI_T\,\alpha_3 = -3487.9893$ N

$\Rightarrow A = 3487.9893$ N

de las ecuaciones estático se tiene

$B = 512.0107$ N 1

$M_B = -298.6809$ Nm 1

d) $\sigma_x = -\frac{M(x)}{I_T} y$ (1) pero $M(x) = E I_T \frac{d^2 y^1}{dx^2} \Rightarrow \sigma_x = -E \frac{d^2 y^1}{dx^2} y$ (2) $\boxed{5}$

en x el máximo es el máximo de $\frac{d^2 y^1}{dx^2}(x)$ $\rightarrow$ se prueba $x=0$ (1)
$x=L$ (1)

además se busca x_{max} tal que $\frac{d^3 y^1}{dx^3}(x_{max}) = 0 \Rightarrow -\frac{w_0}{E I_T}[x_{max} - (x_{max} - l)r(x_{max} - l)] + \alpha_3 = 0$ (2)

si $x_{max} < l \Rightarrow -\frac{w_0 x_{max}}{E I_T} + \alpha_3 = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{\alpha_3 E I_T}{w_0} = 0.697597 < 0.8$ (1) ✓

si $x_{max} \geq l \rightarrow$ no hay x_{max}

se evalúa en $x = \begin{cases} 0 \\ 0.697597 \\ 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2 y^1}{dx^2} = \begin{cases} -0.01038789 \\ 4.06113\cancel{6}9 \times 10^{-3} \\ -3.54728 \times 10^{-3} \end{cases}$ (1)

$\Rightarrow$ máximo absoluto está en $x=0$ (2)

$\rightarrow$ respecto a eje neutro

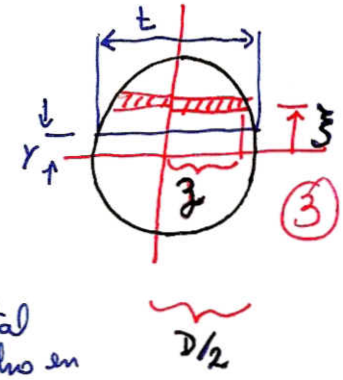
$$\Rightarrow \sigma_{x_{max}} = -E \left(\frac{d^2 y^1}{dx^2}\right)_{max} \underset{\substack{\uparrow \\ = -\bar{y} \text{ hacia abajo}}}{y_{max}}$$ (2)

$\Rightarrow \sigma_{x_{max}} = -120 \cdot 10^9 \cdot (-1) \cdot 0.01038789 \cdot (-1) \cdot 0.03625$ (1)

$= -45.1873$ MPa

y está ubicado en $x=0$ e $y = -0.03625$ (1)

3) $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{I_z\, t} \displaystyle\int_y^c \xi \, dA$ 2 sección circular



$c = D/2$ $\qquad y^2 + z^2 = \dfrac{D^2}{4}$ ← ecuación círculo

$\Rightarrow t = 2\sqrt{\dfrac{D^2}{4} - y^2}$ 1 ← total ancho en posición y

$dA = 2\sqrt{\dfrac{D^2}{4} - \xi^2}\, d\xi$ 1

$$\Rightarrow \int_y^c \xi \, dA = \int_y^{D/2} 2\sqrt{\frac{D^2}{4} - \xi^2}\, \xi \, d\xi = -\frac{2}{3}\left(\frac{D^2}{4} - \xi^2\right)^{3/2} \Big|_y^{D/2}$$ 1

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{V(x)}{I_z\, 2\sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2}} \frac{2}{3}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{V(x)}{3 I_z} \sqrt{\frac{D^2}{4} - y^2}$$ 2