Control 2, Resistencia de Materiales ME3202
1er semestre 2011

Profesor: R. Bustamante

1. Un tubo circular hueco A se ajusta sobre el extremo de una barra circular sólida B como se muestra en la Figura 1 en la parte superior. En un inicio, un agujero a través de la barra B forma un ángulo β con una línea que pasa por dos agujeros en la barra A tal como se muestra en la Figura 1 en la parte inferior en donde tenemos una vista *ampliada* de la sección del tubo y el cilindro en el punto de conexión.

   Se hace girar la barra B hasta alinear los agujeros y se pasa un pasador por ellos. Cuando la barra B se libera y el sistema retoma el equilibrio: ¿Cual es el máximo esfuerzo de corte en A y B? (20 puntos)

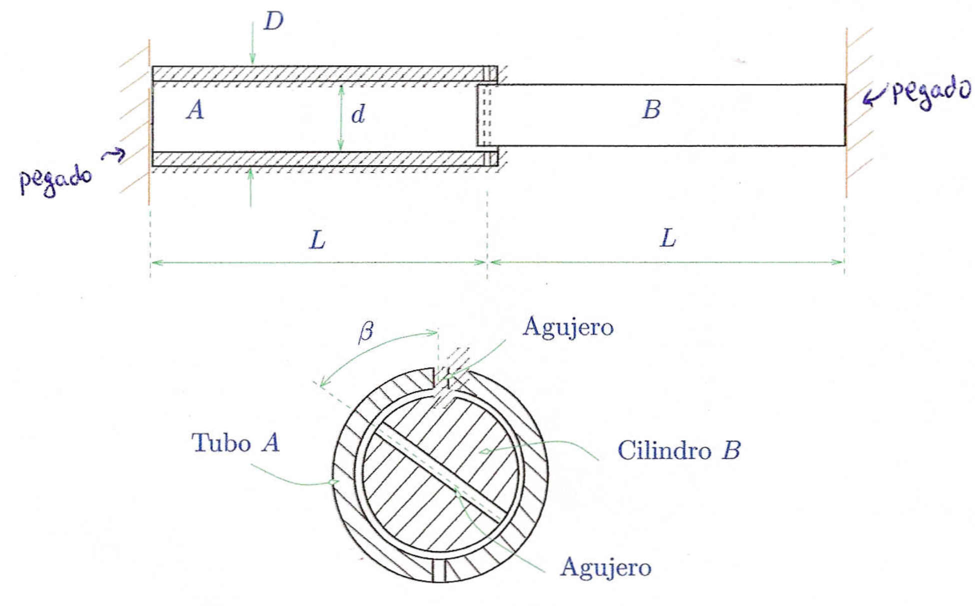


Figura 1: Tubo y cilindro

2. La viga ACB de la Figura 2 (lado izquierdo) cuelga de dos resortes. Los resortes tienen rigideces k_1, k_2. La sección de la viga se muestra en el lado derecho de la figura en forma *ampliada*.

   a) Determine las propiedades de área de la viga. (5 puntos)

   b) ¿Cual es el desplazamiento hacia abajo del punto C cuando se aplica P? (20 puntos)

c) ¿Cual es el máximo esfuerzo normal por flexión en la viga y donde se ubica este esfuerzo? (10 puntos)

(Se debe despreciar el peso de la viga)

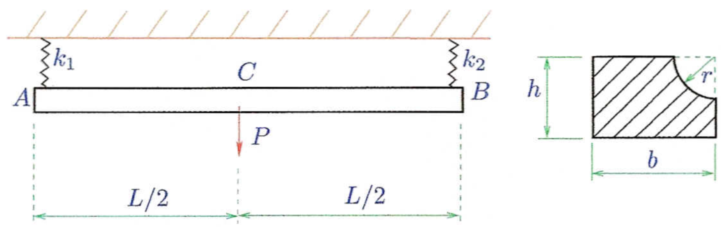


Figura 2: Viga sujeta a resortes

Datos:

$$L = 6\text{m}, \quad k_1 = 300\text{kN/m}, \quad k_2 = 170\text{kN/m}, \quad E = 190\text{GPa},$$
$$h = 10\text{cm}, \quad b = 15\text{cm}, \quad r = 5\text{cm}, \quad P = 5000\text{N}.$$

3. Determine la distribución de esfuerzo de corte causado por la fuerza interna de corte en la viga de la Figura 3. La sección de la viga es mostrada en el lado derecho. (15 puntos)

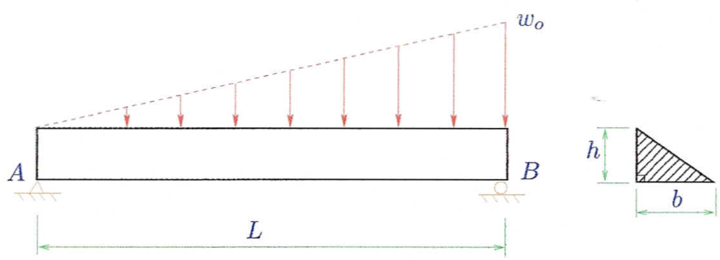


Figura 3: Viga en corte

Formulario

Torsión : $T = \dfrac{\theta G J}{L}, \quad J = \dfrac{\pi D^4}{32}, \quad \tau = \dfrac{Tr}{J},$

Flexión : $\sigma_x = -\dfrac{M(x)y}{I_z},$ Eje neutro $\bar{y} = \dfrac{\int_A y' \,\mathrm{d}A}{A},$ Momento de inercia $I_z = \displaystyle\int_A y^2 \,\mathrm{d}A,$

Eje sección cuadrada $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$ a base, b altura,

Eje sección circular $I_z = \dfrac{\pi d^4}{64}$ d diámetro,

Semicírculo $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$ $I_z = 0{,}1098 r^4$ r radio,

Cuarto de cículo $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{16},$

Triángulo rectángulo $\bar{y} = \dfrac{b}{3}$ $I_z = \dfrac{ab^3}{36}$ a base, b altura,

Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A,$

Deflexión : $\dfrac{d^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} = -\dfrac{w(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d^3\hat{y}}{\mathrm{d}x^3} = -\dfrac{V(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{M(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta(x),$

$$\int \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = r(x-a), \quad \int r(x-a)\,\mathrm{d}x = (x-a)r(x-a),$$

$$\int (x-a)r(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a), \quad \int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x-a)^6 r(x-a),$$

Corte en vigas : Sección rectangular $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{2I_z}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right),$

Sección arbitraria $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{I_z t}\displaystyle\int_y^c \xi \,\mathrm{d}A.$

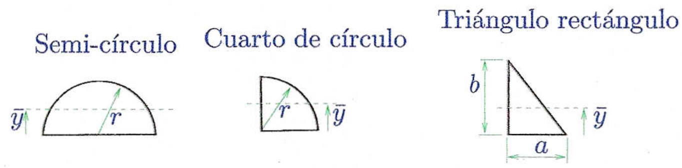
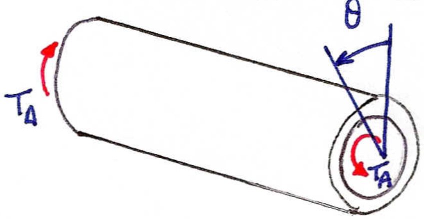


Figura 4: Secciones

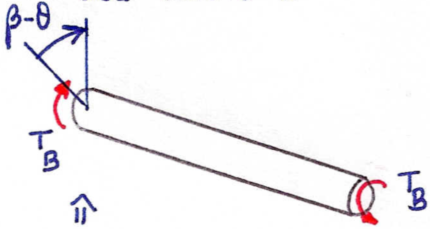
Pauta Control 2

(1) • El eje B sufre una torsión de β en el punto de conección, luego cuando se libera se produce un ángulo adicional θ en el sentido opuesto

DCL tubo A 1



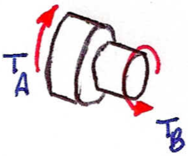
3 DCL cilindro B



$\Uparrow$

$\beta-\theta$: ángulo final de torsión

DCL elemento diferencial
en la zona de conección de A y B



$\Leftarrow$ equilibrio $\boxed{T_A = T_B}$ ⊛ 3

0.5 Pero $T_A = \dfrac{\theta G J_A}{L}$ y $T_B = \dfrac{G J_B(\beta-\theta)}{L}$ 0.5

Luego de ⊛ $\Rightarrow$ $\dfrac{\theta G J_A}{L} = G\dfrac{J_B(\beta-\theta)}{L}$

$\Rightarrow \theta(J_A + J_B) = J_B\,\beta$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{J_B}{(J_A+J_B)}\beta$ 3

Luego $T_A = T_B = \dfrac{J_B J_A}{(J_B + J_A)} \dfrac{\beta G}{L}$ 1

2

pero $\tau_{max_A} = \frac{T}{J_A}\frac{D}{2} = \frac{J_B \cancel{J_A}}{(J_B+J_A)}\frac{\beta G}{L}\frac{D}{2\cancel{J_A}} = \frac{J_B \beta G D}{2(J_A+J_B)L}$ 2

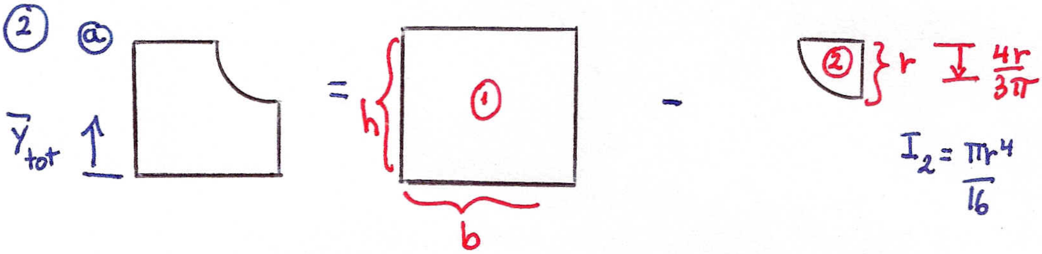
$\tau_{max_B} = \frac{T}{J_B}\frac{d}{2} = \frac{\cancel{J_B} J_A}{(J_B+J_A)}\frac{\beta G}{L}\frac{d}{2\cancel{J_B}} = \frac{J_A \beta G d}{2(J_A+J_B)L}$ 2

pero $J_A = \frac{\pi}{32}(D^4-d^4) \qquad J_B = \frac{\pi d^4}{32}$

$\Rightarrow \tau_{max_A} = \frac{d^4 \beta G D}{2 D^4 L}$ 2

$\tau_{max_B} = \frac{(D^4-d^4)\beta G d}{2 D^4 L}$ 2

3| ② ⓐ



(1)

$$I_2 = \frac{\pi r^4}{16}$$

$$\bar{Y}_{tot} = \frac{\bar{Y}_1 A_1 - \bar{Y}_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{\frac{h}{2} hb - \left(h - \frac{4r}{3\pi}\right)\frac{\pi r^2}{4}}{hb - \frac{\pi r^2}{4}} = 4.567 \text{ cm}$$ (2)

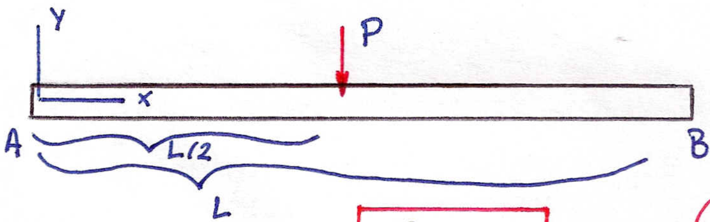
$$I_z = \bar{I}_1 - \bar{I}_2 \qquad \bar{I}_1 = I_1 + \delta_1^2 A_1 \qquad \bar{I}_2 = I_2 + \delta_2^2 A_2$$

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} \qquad \delta_1 = \frac{h}{2} - \bar{Y}_{tot}$$

$$I_2 = \frac{\pi r^4}{16} \qquad \delta_2 = h - \frac{4r}{3\pi} - \bar{Y}_{tot}$$

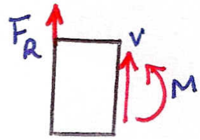
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bar{I}_1 = 1.2781 * 10^{-5} \text{ m}^4 \\ \bar{I}_2 = 3.3796 * 10^{-6} \text{ m}^4 \end{array}\right\} \Rightarrow I_z = 9.4014 * 10^{-6} \text{ m}^4$$ (2)

ⓑ



(2)

Condiciones de borde: A: $M(0) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\hat{Y}}{dx^2}(0) = 0}$ ⓘ

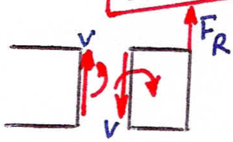


$$F_R = -k_1 \hat{Y}(0)$$

$$\Rightarrow V(0) = -F_R = k_1 \hat{Y}(0)$$

$$V = -EI \frac{d^3\hat{Y}}{dx^3} \Rightarrow \boxed{-EI \frac{d^3\hat{Y}}{dx^3}(0) = k_1 \hat{Y}(0)}$$ ⓘⓘ (3)

B: $M(L)=0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L)=0}$ (iii) 2



$F_R = -k_2\,\hat{y}(L)$

$V(L) = F_R$

$\Rightarrow \boxed{E I_z \frac{d^3\hat{y}}{dx^3}(L) = k_2\,\hat{y}(L)}$ (iv) 3

resolver $\frac{d^4\hat{y}}{dx^4} = -\frac{1}{EI_z} P\,\delta(x-L/2)$ 1

$\Rightarrow \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} = \frac{-P}{EI_z} r(x-L/2) + C_3$

$\Rightarrow \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = \frac{-P}{EI_z}(x-L/2)\,r(x-L/2) + C_3 x + C_2$

$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = \frac{-P}{2EI_z}(x-L/2)^2\,r(x-L/2) + C_3\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_1$

$\Rightarrow \hat{y} = \frac{-P}{6EI_z}(x-L/2)^3\,r(x-L/2) + C_3\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_0$ 1

1

de (i) $\Rightarrow C_2 = 0$

de (iii) $\Rightarrow \frac{-P}{EI_z}\frac{L}{2} + C_3 L \Rightarrow C_3 = \frac{P}{2EI_z}$ 1

de (ii) $\Rightarrow -EI_z\left(\frac{P}{2EI_z}\right) = k_1 C_0 \Rightarrow C_0 = \frac{-P}{2k_1}$ 1

de (iv) $EI_z\left(\frac{-P}{EI_z} + \frac{P}{2EI_z}\right) = k_2\left[\frac{-P}{6EI_z}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{P}{2EI_z}\frac{L^3}{6} + C_1 L - \frac{P}{2k_1}\right]$

$\Leftrightarrow -\frac{P}{2} = k_2\frac{3PL^3}{48EI_z} + k_2 C_1 L - \frac{Pk_2}{2k_1}$

5

$$\Rightarrow k_2 L c_1 = \frac{Pk_2}{2k_1} - \frac{P}{2} - k_2 \frac{3PL^3}{48EI_z}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{k_2 L}\left(\frac{Pk_2}{2k_1} - \frac{P}{2} - k_2 \frac{3PL^3}{48EI_z}\right)$$ 1

tenemos

$C_0 = -8.3333 * 10^{-3}$ 1

$C_1 = -7.360146 * 10^{-3}$ 1

$C_2 = 0$ 1

$C_3 = 1.39957 * 10^{-3}$

Desplazamiento en C $\quad \hat{y}(L/2) = C_3 \frac{1}{6}\left(\frac{L}{2}\right)^3 + C_2 \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + C_1 \frac{L}{2} + C_0$

$= -0.024116$ m 1

$= -2.4116$ cm

ⓒ $\sigma_x = -\frac{M}{I_z} y \quad$ pero $M = EI_z \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}$ 1

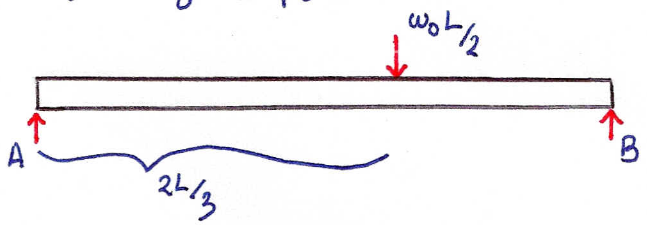
$\Rightarrow \sigma_x = -E \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} y \quad$ máximo para $\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}$ en $x = L/2$ 3

máximo para y $\quad y_{max} = h - \bar{y}_{tot} = 5.433$ cm ⇐ ubicado extremo superior 2

$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(L/2) = c_3 \frac{L}{2}$

$\Rightarrow \sigma_{x\,max} = -E\left(\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}\right)_{max} y_{max} = -43.342$ MPa 4

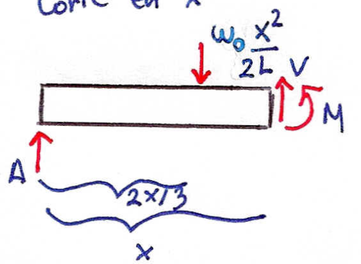
3 DCL viga completa



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \quad A + B = \frac{w_0 L}{2}$$

$$\sum_A M_z = 0 \Rightarrow \quad BL = w_0 \frac{L}{2}\,\frac{2L}{3} \Rightarrow B = \frac{w_0 L}{3} \Rightarrow A = \frac{w_0 L}{6} \quad 1$$

Corte en x

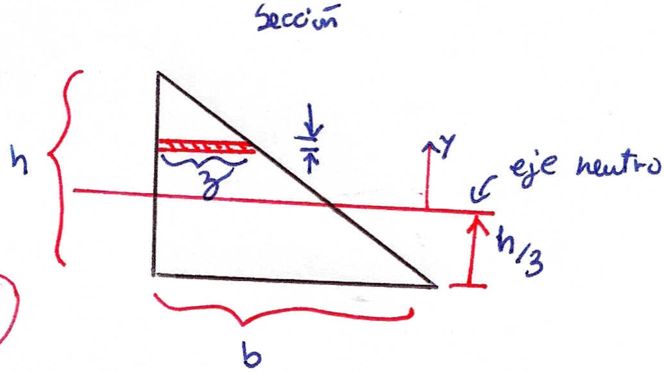


$$\Rightarrow V = \frac{w_0 x^2}{2L} - A = \frac{w_0 x^2}{2L} - \frac{w_0 L}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = w_0\left(\frac{x^2}{2L} - \frac{L}{6}\right)} \quad 1$$

$$\tau_{xy} = \frac{V}{I_z t}\int_y^c \xi \, dA$$

Sección



y: desde eje neutro

$$\Rightarrow \xi = -\frac{b}{h}y + \frac{2}{3}b \quad 2$$

$$1 \quad c = \frac{2h}{3} \qquad t = -\frac{b}{h}y + \frac{2}{3}b \qquad 1 \quad I_z = \frac{bh^3}{36}$$

$$dA = \left(-\frac{b}{h}\xi + \frac{2}{3}b\right)d\xi$$

3

$$\Rightarrow \int_y^c \xi \, dA = \int_y^{2h/3} \underbrace{\xi\left(-\frac{b}{h}\xi + \frac{2}{3}b\right)}_{-\frac{b}{h}\xi^2 + \frac{2}{3}b\xi} d\xi = -\frac{b}{3h}\xi^3 + \frac{b\xi^2}{3}\Bigg|_y^{2h/3}$$

$$\Rightarrow \int_y^c \xi \, dA = \frac{b}{3}\left(-\frac{\xi^3}{h} + \xi^2\right)\Big|_y^{2h/3}$$

$$= \frac{b}{3}\left(\underbrace{-\frac{1}{h}\underbrace{\left(\frac{2h}{3}\right)^3}_{\frac{8h^3}{27}}}_{-\frac{8h^2}{27}} + \underbrace{\left(\frac{2h}{3}\right)^2}_{\frac{4h^2}{9}} + \frac{y^3}{h} - y^2\right)$$

$$= \frac{b}{3}\left(\frac{4}{27}h^2 + \frac{y^3}{h} - y^2\right) \quad 3$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{w_0\left(\frac{x^2}{2L} - \frac{L}{6}\right)}{\left[\frac{bh^3}{36}\left(-\frac{b}{h}y + \frac{2}{3}b\right)\right]} \frac{b}{3}\left(\frac{4}{27}h^2 + \frac{y^3}{h} - y^2\right) \quad 3$$