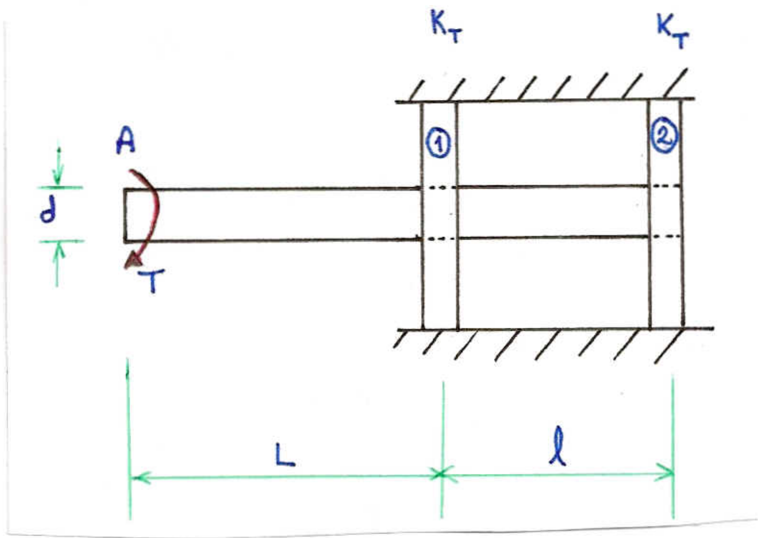
Control 2. Resistencia de Materiales ME3202-1 46A-1.

06/05/2009

Profesor: R. Bustamante

1) Un Torque T se aplica al eje de diámetro d de la figura en el punto A. El eje esta fijo a los bujes *(1)* y *(2)*. Los bujes a su vez están fijos a un agujero rígido e inmóvil. Cada buje tiene una constante de resorte K_T, de manera tal que el torque de reacción generado por cada buje es igual a K_T multiplicado por el ángulo de torsión en el punto (en radianes).
Calcule el ángulo de torsión total en el punto A. (20 puntos)

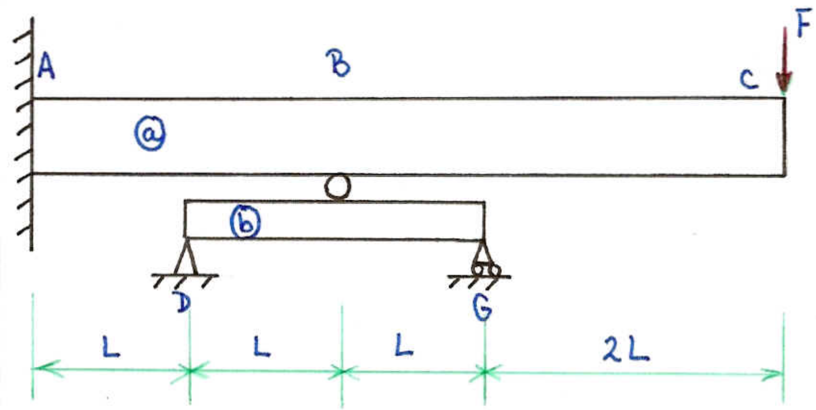


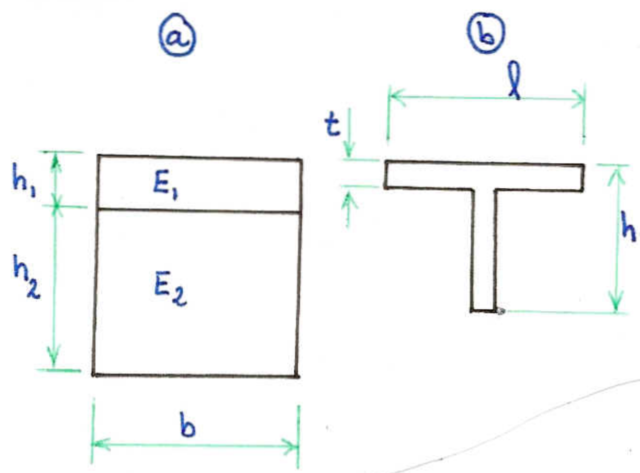
2) La viga ABC está compuesta de dos materiales distintos con módulos de elasticidad E_1, E_2, y cuya sección transversal se muestra en el lado derecho de la figura (sección *(a)*). Esta viga esta empotrada en su extremo izquierdo, sometida a una fuerza puntual F en el extremo derecho, y en contacto a través de un rodillo en el punto B con otra viga DG. La sección de la viga DG es mostrada en *(b)*. Esta viga está hecha de un solo material.

a) Determine los ejes neutros para las vigas ABC y DG. (10 puntos)
b) Determine I_{z1}, I_{z2} para la viga *(a)* e I_z para la viga *(b)*. (5 puntos)
c) Determine las fuerzas y torques de reacción que se producen en la pared A y en el punto B. (25 puntos)

Datos:

Viga ABC	E_1 = 200 GPa, E_2 = 70 GPa, b = 8 cm, h_1 = 4 cm, h_2 = 10 cm, L = 1 m, F = 1000 N
Viga DG	E = 190 GPa, l = 12 cm, h = 10 cm, t = 1 cm





Formulario

Torsión $T = \dfrac{\theta GJ}{L}$ Sección circular $J = \dfrac{\pi D^4}{32}$ $\tau = \dfrac{Tr}{J}$

Sección rectangular $J = k_2 ab^3$ $\tau = \dfrac{T}{k_1 ab^2}$ $b \le a$

a/b	1	1.5	2	4	10	∞
k_1	0.208	0.231	0.246	0.282	0.312	1/3
k_2	0.141	0.196	0.281	0.281	0.312	1/3

Flexión

Método área de momento $\Delta_{AB} = \int_A^B x' \dfrac{M}{EI} dx$

Esfuerzo $\sigma_x = -\dfrac{M(x)}{I_z} y$

Momento inercia de área y eje neutro

Caso general

Eje neutro $\int_A y dA = 0$ momento inercia $I_z = \int_A y^2 dA$

Sección rectangular $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$

a : base ***b***: altura

Eje paralelo al neutro $I_z = \hat{I}_z + distancia^2 Area$

Viga de dos materiales

Eje neutro $E_1 \int_{A_1} ydA + E_2 \int_{A_2} ydA = 0$

Ecuación de la elástica

$\hat{y}$: Deflexión vertical de la viga

$$\frac{d^4\hat{y}}{dx^2} = -\frac{w(x)}{EI} \quad \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} = -\frac{V(x)}{EI} \quad \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad \frac{d\hat{y}}{dx} \approx \theta(x)$$

$$\int \delta(x-a)dx = r(x-a)$$

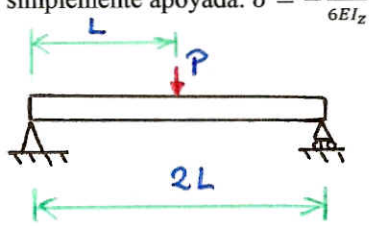
$$\int r(x-a)dx = (x-a)r(x-a)$$

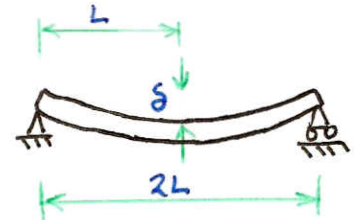
$$\int (x-a)r(x-a)dx = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)$$

$$\int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)dx = \frac{1}{6}(x-a)^3 r(x-a)$$

Para viga de dos materiales, reemplazar ***EI*** por $E_1I_1+E_2I_2$ en las expresiones anteriores para el cálculo de la deflexión, donde I_1 e I_2 son los momentos de inercia de A_1 y A_2 respecto al eje neutro común de la viga compuesta

- Dato: desplazamiento vertical en el punto de aplicación de una fuerza puntual para viga simplemente apoyada: $\delta = -\frac{PL^3}{6EI_z}$

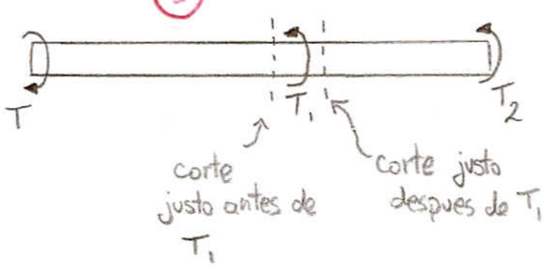




Pauta Control 2, 1er semestre 2009

1 Diagrama cuerpo libre eje

3



$T_1 + T_2 = T$ 1

ángulo torsión 1

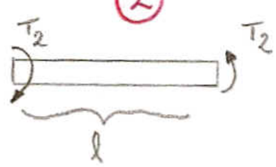
En el buje 1 $\quad T_1 = K_T\,\theta_1$ 1

buje 2 $\quad T_2 = K_T\,\theta_2$ 1

ángulo torsión 2

tramo 1 a 2

2



$$T_2 = \frac{G\,\Delta\theta_{12}}{l}\,J \quad 1 \qquad J = \frac{\pi d^4}{32}$$

$\Delta\theta_{12}$: cambio de ángulo de 1 a 2

$$\Rightarrow \Delta\theta_{12} = \frac{T_2\, l}{JG}$$

2 Luego $\theta_1 = \theta_2 + \Delta\theta_{12}$ pero $\theta_1 = \dfrac{T_1}{K_T}$ y $\theta_2 = \dfrac{T_2}{K_T}$

de $T_1 + T_2 = T$ tenemos $T_1 = T - T_2$

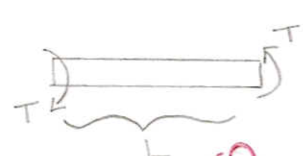
$$\Rightarrow \frac{(T - T_2)}{K_T} = \frac{T_2}{K_T} + \frac{T_2\, l}{JG} \quad 2$$

$$\Rightarrow T = 2T_2 + T_2\frac{l K_T}{JG}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{T}{\left(2 + \frac{l K_T}{JG}\right)} \quad 1$$

$$\Rightarrow \theta_1 = T_2\left(\frac{1}{K_T} + \frac{l}{JG}\right) = \frac{T}{\left(2 + \frac{l K_T}{JG}\right)} \left(\frac{1}{K_T} + \frac{l}{JG}\right) \quad 2$$

tramo 1 a A



1

$$\Delta\theta_{1A} = \frac{TL}{JG} \quad 1$$

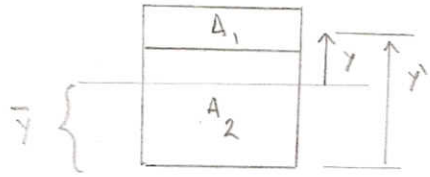
cambio de ángulo de 1 a A

Luego $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{ángulo total en A}}}{\theta_4} = \theta_1 + \Delta\theta_{1A} = T\left[\frac{L}{JG} + \frac{\left(2 + \frac{l K_T}{JG}\right)}{\left(\frac{1}{K_T} + \frac{l}{JG}\right)} \right]$ (2)

donde $J = \frac{\pi d^4}{32}$

2 a) Cálculo de eje neutro

Viga (a)



$\bar{y}$: eje neutro

$$E_1 \int_{A_1} y \, dA + E_2 \int_{A_2} y \, dA = 0 \quad 2$$

calculando respecto a $y' = \bar{y} + y$

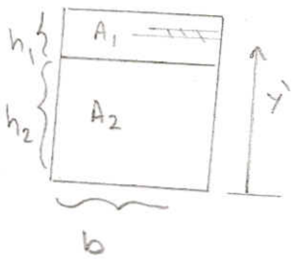
$$E_1 \int_{A_1} y' dA + E_2 \int_{A_2} y' dA = E_1 \int_{A_1} (\bar{y}+y)\, dA + E_2 \int_{A_2} (\bar{y}+y)\, dA$$

$$= E_1 \int_{A_1} \bar{y}\, dA + E_2 \int_{A_2} \bar{y}\, dA + \underbrace{E_1 \int_{A_1} y\, dA + E_2 \int_{A_2} y\, dA}_{=0 \text{ por definición}}$$

$$= E_1 \bar{y} A_1 + E_2 \bar{y} A_2$$

luego
$$\bar{y} = \frac{E_1 \int_{A_1} y' dA + E_2 \int_{A_2} y' dA}{E_1 A_1 + E_2 A_2} \quad 2$$

en nuestro caso



$$\int_{A_1} y' dA = \int_{h_2}^{h_2+h_1} y' b \, dy'$$

$$= \frac{b}{2} \left[(h_2+h_1)^2 - h_2^2 \right]$$

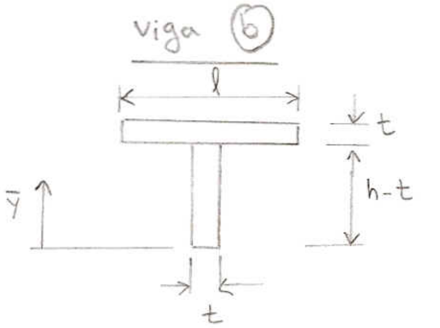
$$= 384 \text{ cm}^3$$

$$\int_{A_2} y' dA = \int_0^{h_2} y' b \, dy' = \frac{b}{2} h_2^2$$

$$= 400 \text{ cm}^3$$

3 luego
$$\bar{y} = \frac{200 \text{ GPa} \cdot 384 \text{ cm}^3 + 70 \text{ GPa} \cdot 400 \text{ cm}^3}{200 \text{ GPa} \cdot 32 \text{ cm}^2 + 70 \text{ GPa} \cdot 80 \text{ cm}^2} = 8{,}733 \text{ cm}$$

Viga (b)

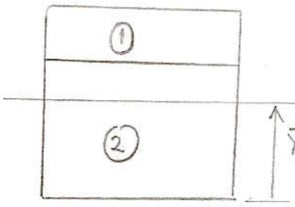


$$\bar{y} = \frac{(h - t/2)\, t l + \frac{(h-t)}{2}\, t\, (h-t)}{t l + (h-t)\, t} \quad 3$$

$$= \frac{(10 - 0{,}5)\, 12 + \frac{(10-1)}{2} (10-1)}{12 + (10-1)} \text{ cm} = 7{,}357 \text{ cm}$$

b) Cálculo de I

Viga ⓐ



Calculado respecto a eje $\bar{y}$

$$\underset{\text{respecto a } \bar{y}}{I_1} = \underset{\text{respecto a su propio eje}}{\bar{I}_1} + \delta_1^2 A_1$$

$$\bar{I}_1 = \frac{bh_1^3}{12} \qquad \delta_1 = h_2 + \frac{h_1}{2} - \bar{y} \qquad A_1 = bh_1$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{bh_1^3}{12} + \left(h_2 + \frac{h_1}{2} - \bar{y}\right)^2 bh_1$$

1

$$= \frac{8 \cdot 4^3}{12} + \left(10 + \frac{4}{2} - 8{,}733\right)^2 8 \cdot 4 = 384{,}2119 \text{ cm}^4$$

$$= 3{,}842119 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$I_2 = \bar{I}_2 + \delta_2^2 A_2$$

$$\bar{I}_2 = \frac{bh_2^3}{12} \qquad \delta_2 = \bar{y} - \frac{h_2}{2} \qquad A_2 = bh_2$$

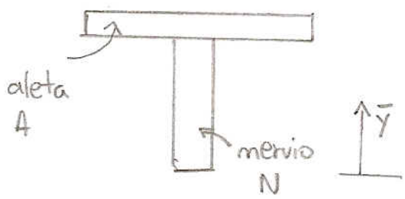
1

$$\Rightarrow I_2 = \frac{bh_2^3}{12} + (\bar{y} - h_2/2)^2 bh_2$$

$$= \frac{8 \cdot 10^3}{12} + (8{,}733 - 5)^2 \cdot 8 \cdot 10 = 1781{,}4898 \text{ cm}^4$$

$$= 1{,}7814898 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

Viga ⓑ



1

$$I_T = \underset{\text{aleta}}{I_A} + \underset{\text{nervio}}{I_N} \quad \leftarrow \text{respecto a } \bar{y}$$

$$I_A = \underbrace{\frac{lt^3}{12}}_{\text{respecto a su propio eje}} + \left(h - \frac{t}{2} - \bar{y}\right)^2 lt$$

$$I_N = \frac{t(h-t)^3}{12} + \left[\bar{y} - \left(\frac{h-t}{2}\right)\right]^2 t(h-t)$$

$$\Rightarrow I_T = \frac{lt^3}{12} + \left(h - \frac{t}{2} - \bar{y}\right)^2 lt + \frac{t(h-t)^3}{12} + \left[\bar{y} - \left(\frac{h-t}{2}\right)\right]^2 t(h-t)$$

2

$$= \frac{12 \cdot 1}{12} + (10 - 0{,}5 - 7{,}357)^2 \cdot 12 \cdot 1 + \frac{1 \cdot (10-1)^3}{12} + \left[7{,}357 - \left(\frac{10-1}{2}\right)\right]^2 \cdot 1 \cdot (10-1)$$

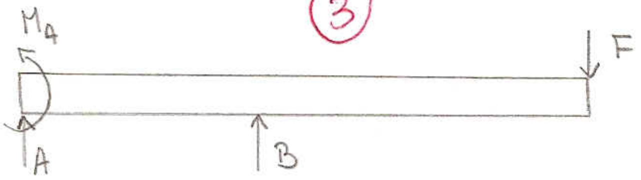
$$= 190{,}3214 \text{ cm}^4$$

$$= 1{,}903214 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

c) Cálculo de reacciones en A, B

DCL Viga AC

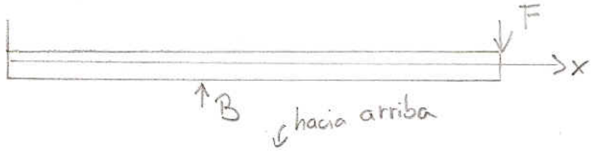
3



1 $\sum F_y = 0 \Rightarrow A + B = F$

1 $\sum_A M_z = 0 \Rightarrow M_A + B\,2L - F\,5L = 0$ } 2 ecuaciones, 3 incognitas A, B, M_A

Deflexión viga ⓐ



hacia arriba

resolver $\dfrac{d^4\hat{y}}{dx^4} = \dfrac{B}{E_1 I_1 + E_2 I_2}\,\delta(x - 2L)$ 1 sea $\Lambda = E_1 I_1 + E_2 I_2$ 1

$= 201546{,}66 \underbrace{\text{Pa m}^4}_{\text{N m}^2}$

$\Rightarrow \dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3} = \dfrac{B}{\Lambda}\, r(x-2L) + \alpha_3$

$\Rightarrow \dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2} = \dfrac{B}{\Lambda}(x-2L)\, r(x-2L) + \alpha_3 x + \alpha_2$

$\Rightarrow \dfrac{d\hat{y}}{dx} = \dfrac{B}{2\Lambda}(x-2L)^2\, r(x-2L) + \alpha_3 \dfrac{x^2}{2} + \alpha_2 x + \alpha_1$

$\Rightarrow \hat{y} = \dfrac{B}{6\Lambda}(x-2L)^3\, r(x-2L) + \alpha_3 \dfrac{x^3}{6} + \alpha_2 \dfrac{x^2}{2} + \alpha_1 x + \alpha_0$ 1

Condiciones de borde

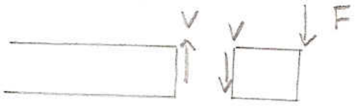
lado izquierdo: $\hat{y}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$ 2

empotrado $\rightarrow \dfrac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ 2

lado derecho: $M(5L) = 0 \Rightarrow \dfrac{d^2\hat{y}}{dx^2}(5L) = 0 \Rightarrow \dfrac{B}{\Lambda}3L + \alpha_3 5L + \alpha_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_2 = -\dfrac{3LB}{\Lambda} - 5L\alpha_3$ 2

corte



$\Rightarrow V(5L) = -F$

pero $V(x) = -\Lambda \dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3}$ 2

$\Rightarrow \dfrac{d^3\hat{y}}{dx^3}(5L) = \dfrac{F}{\Lambda}$

$$\Rightarrow \frac{B}{\Lambda} + \alpha_3 = \frac{F}{\Lambda} \Rightarrow \alpha_3 = \frac{1}{\Lambda}(F - B) \qquad 1$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = -\frac{3LB}{\Lambda} - \frac{5L}{\Lambda}(F - B)$$

$$= \frac{2LB}{\Lambda} - \frac{5LF}{\Lambda} \qquad 1$$

$\Rightarrow$ deflexión $\quad \hat{y}(x) = \frac{B}{6\Lambda}(x-2L)^3 r(x-2L) + \frac{1}{6\Lambda}(F-B)x^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{2LB}{\Lambda} - \frac{5LF}{\Lambda}\right)x^2$

deflexión viga ⓐ en punto B

$$\hat{y}(2L) = \frac{1}{6\Lambda}(F-B)(2L)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{2LB}{\Lambda} - \frac{5LF}{\Lambda}\right)(2L)^2 \qquad 1$$

deflexión viga ⓑ en punto B

$$\hat{y}(L) = -\frac{BL^3}{6EI_T} \qquad 1$$

la deflexión en B <u>es igual para ambas vigas</u> (contacto en B) 2

$$\Rightarrow -\frac{BL^3}{6EI_T} = \frac{1}{6\Lambda}(F-B)\,8L^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{2LB}{\Lambda} - \frac{5LF}{\Lambda}\right)4L^2$$

$$\Rightarrow B\left(\frac{L^3}{6EI_T} - \frac{8L^3}{6\Lambda} + \frac{4L^3}{\Lambda}\right) = \left(\frac{-8L^3}{6\Lambda} + \frac{20}{2}\frac{L^3}{\Lambda}\right)F \Rightarrow B = \frac{\frac{1}{\Lambda}\left(-\frac{4}{3}+10\right)F}{\frac{1}{6EI_T} + \left(4 - \frac{4}{3}\right)\frac{1}{\Lambda}}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\frac{1}{2015466{,}66}\left(-\frac{4}{3}+10\right)1000}{\frac{1}{6\cdot 190\cdot 10^9 \cdot 1{,}903214\cdot 10^{-6}} + \left(4 - \frac{4}{3}\right)\frac{1}{2015466{,}66}}\ N = 2410{,}355\ N \qquad 1$$

luego de $\quad A + B = F \Rightarrow A = -1410{,}355\ N \qquad 1$

$$M_A = 5LF - 2LB = 179{,}29\ Nm \qquad 1$$