Control 2, Resistencia de Materiales ME3202
1er semestre 2012

Profesor: R. Bustamante

1. En la Figura 1 se tiene una vista lateral de dos ejes. El eje 1 está sostenido por dos apoyos sin roce y bajo el efecto de un torque T_1 en el extremo izquierdo A. En el extremo derecho tiene un engranaje de diámetro D_1, el cual está en contacto con un engranaje de diámetro D_2. El engranaje de diámetro D_2 se encuentra sujeto a un eje 2, el cual está pegado a una pared rígida en el lado izquierdo, soportado por dos apoyos sin roce y bajo la acción de un torque T_2 en el lado derecho. Determine los ángulos de rotación en A y en B, determine también el valor del esfuerzo de corte máximo y su ubicación. (25 puntos)

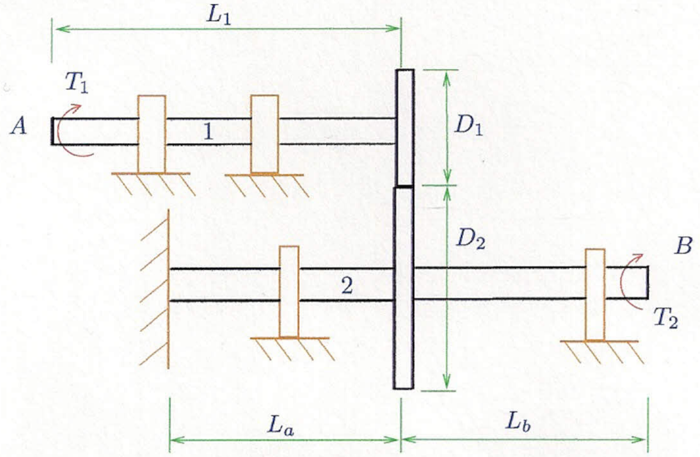


Figura 1: Ejes y engranajes

Datos: $T_1 = 10^4$Nm, $L_1 = 1$m, $D_1 = 17$cm, diámetro eje 1 $d_1 = 7$cm, $T_2 = 3000$Nm, $L_a = 60$cm, $L_b = 80$cm, $D_2 = 40$cm, diámetro eje 2 $d_2 = 6$cm, $G = 75$GPa.

2. En la Figura 2 (lado izquierdo) se tiene una viga bajo la acción de una fuerza uniforme w_0 y una fuerza puntual P. La sección de la viga (vista ampliada) se muestra en el lado derecho, el espesor de la pared de la sección de la viga es el mismo en todas partes.

   Determine:

   a) Eje neutro y segundo momento de inercia para la sección. (7 puntos)

   b) Reacciones en los soportes A y C. Nótese que el soporte A inicialmente se encuentra a una distancia d de la viga. (30 puntos)

   c) Máximo esfuerzo normal en la zona definida por el corte imaginario en B (línea segmentada). (6 puntos)

Datos: $E = 210$GPa, $w_0 = 5000$N/m, $P = 10000$N, $a = 40$cm, $b = 1$m, $c = 50$cm, $f = 50$cm, $h = 9$cm, $r = 11$cm, $e = 2$cm, $d = 1$cm.

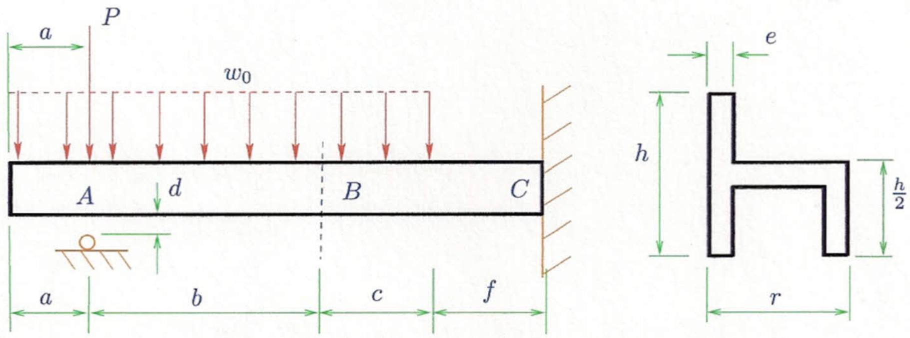


Figura 2: Viga

Formulario

Torsión : $T = \dfrac{\theta G J}{L}, \quad J = \dfrac{\pi D^4}{32}, \quad \tau = \dfrac{Tr}{J},$

Eje de dos materiales concéntricos $T = \dfrac{2\pi\theta}{L}\left[G_1\dfrac{D_1^4}{64} + \dfrac{G_2}{64}(D_2^4 - D_1^4)\right],$

Flexión : $\sigma_x = -\dfrac{M(x)y}{I_z},$ Eje neutro $\bar{y} = \dfrac{\int_A y'\,\mathrm{d}A}{A},$ Momento de inercia $I_z = \displaystyle\int_A y^2\,\mathrm{d}A,$

Propiedades de área: Eje sección cuadrada $I_z = \dfrac{ab^3}{12}$ a base, b altura,

Eje sección circular $I_z = \dfrac{\pi d^4}{64}$ d diámetro,

Semicírculo $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$ $I_z = 0{,}1098 r^4$ r radio,

Cuarto de cículo $\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{16},$

Triángulo rectángulo $\bar{y} = \dfrac{b}{3}$ $I_z = \dfrac{ab^3}{36}$ a base, b altura,

Eje paralelo $\bar{I}_z = I_z + \delta^2 A,$

Deflexión : $\dfrac{d^4\hat{y}}{\mathrm{d}x^4} = -\dfrac{w(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d^3\hat{y}}{\mathrm{d}x^3} = -\dfrac{V(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d^2\hat{y}}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{M(x)}{EI_z}, \quad \dfrac{d\hat{y}}{\mathrm{d}x} \approx \theta(x),$

$\displaystyle\int \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = r(x-a), \quad \int r(x-a)\,\mathrm{d}x = (x-a)r(x-a),$

$\displaystyle\int (x-a)r(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a), \quad \int \frac{1}{2}(x-a)^2 r(x-a)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(x-a)^6 r(x-a),$

Corte en vigas : Sección rectangular $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{2I_z}\left(\dfrac{h^2}{4} - y^2\right),$

Sección arbitraria $\tau_{xy} = \dfrac{V(x)}{I_z t}\displaystyle\int_y^c \xi\,\mathrm{d}A.$

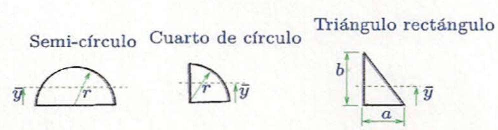
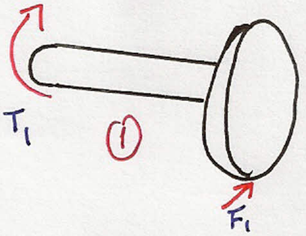


Figura 3: Secciones

1/ (1) Diagramas de cuerpo libres de ambos ejes



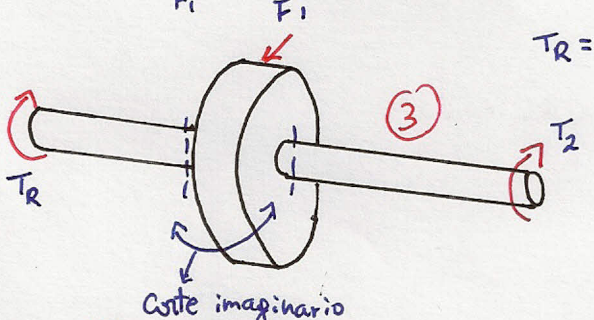
$$T_1 = F_1 \frac{D_1}{2}$$

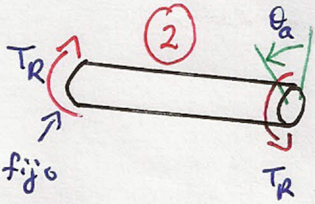
$$\Rightarrow F_1 = 117647 \text{ N}$$

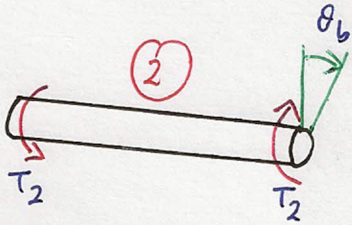
Equilibrio eje 2 (1)

$$T_R = F_1 \frac{D_2}{2} - T_2 =$$

$$20529 \text{ Nm}$$







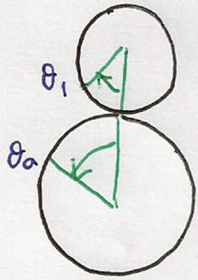
$$\theta_a = \frac{L_a T_R}{G J_2} \quad (1)$$

$$\theta_b = \frac{L_b T_2}{G J_2} \quad (1) \qquad J_2 = \frac{\pi d_2^4}{32}$$

luego el ángulo total en B es

$$\theta_B = \theta_a - \theta_b = \frac{L_a T_R - L_b T_2}{G J_2} = 0.1039 \text{ rad} \quad (3)$$

ángulo rotación engranaje D_2 es θ_a



luego $\theta_a D_2 = \theta_1 D_1$ (2)

$$\Rightarrow \theta_1 = \theta_a \frac{D_2}{D_1}$$

Por otro lado el ángulo entre el engranaje D_1 y A (relativo) es $\theta_{1A} = \frac{L_1 T_1}{G J_1}$ $\quad J_1 = \frac{\pi d_1^4}{32}$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ángulo total} \\ \text{en } A}}{\theta_A} = \theta_1 + \theta_{1A} = 0.36027 \text{ rad}$$ 3

Esfuerzo máximo de corte eje 1 $\quad \tau_{max} = \frac{T_1 d_1}{J_1 2} = 148.48 \text{ MPa}$ 2

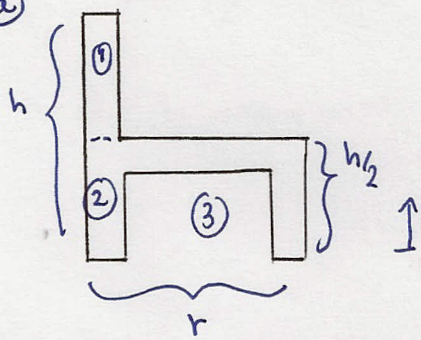
Esfuerzo máximo de corte eje 2 $\quad \tau_{max} = \frac{T_R d_2}{J_2 2} = 484.04 \text{ MPa}$ 2

$\Rightarrow$ máximo esfuerzo de corte en el sistema $\quad \tau_{max} = 484.04 \text{ MPa}$ 2

y ocurre en el eje 2 en el lado izquierdo del engranaje D_2

3/ (2)

(a)



$$\bar{y}_{tot} = \frac{\frac{h}{2} r \frac{h}{4} + \frac{h}{2} e \frac{3}{4} h - (r-2e)\left(\frac{h}{2}-e\right)\frac{\left(\frac{h}{2}-e\right)}{2}}{\frac{h}{2} r + \frac{h}{2} e - (r-2e)(h/2-e)}$$

$= 3.6646$ cm

$= 0.036646$ m (2)

$I_1 = \frac{e(h/2)^3}{12}$ $\quad \bar{I}_1 = I_1 + e\frac{h}{2}\left(\frac{3h}{4} - \bar{y}_{tot}\right)^2 = 100.8647 \text{ cm}^4$ (1)

$I_2 = \frac{r(h/2)^3}{12}$ $\quad \bar{I}_2 = I_2 + r\frac{h}{2}\left(\frac{h}{4} - \bar{y}_{tot}\right)^2 = 182.5853 \text{ cm}^4$ (1)

$I_3 = \frac{(r-2e)(h/2-e)^3}{12}$ $\quad \bar{I}_3 = I_3 + (r-2e)(h/2-e)\left[\frac{(h/2-e)}{2} - \bar{y}_{tot}\right]^2$

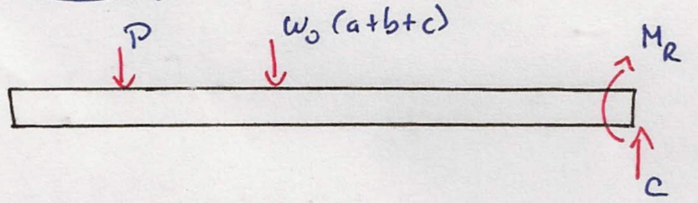
$= 111.1447 \text{ cm}^4$ (1)

$\Rightarrow I_{tot} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 - \bar{I}_3 = 172.3053 \text{ cm}^4 = 1.723053 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ (2)

(b) No se sabe si con las fuerzas w_0 y P la viga alcanza a entrar en contacto en A, de modo que hay que considerar 2 casos

(i) No hay contacto en A $\Rightarrow A = 0$

DCL viga



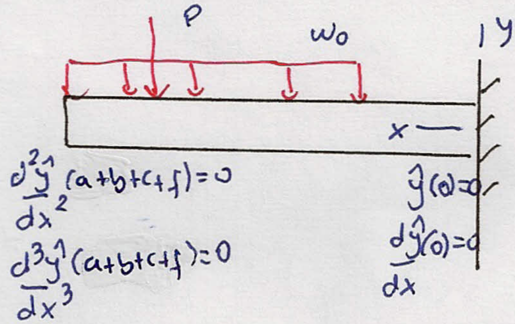
(1)

Luego de equilibrio tenemos

$$C = P + w_0(a+b+c) = 19500\,N \quad (1)$$

$$M_R = P(b+c+f) + w_0(a+b+c)\left[f + \frac{(a+b+c)}{2}\right] = 33775\ Nm \quad (1)$$

Hay que verificar que el desplazamiento en A no supera el valor d, para ello es necesario determinar $\hat{y}(A)$



(3)

$$\frac{d^4\hat{y}}{dx^4} = -\frac{1}{EI_z}\left[w_0 r(x-f) + P\delta(x-(b+c+f))\right] \quad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{d^3\hat{y}}{dx^3} = -\frac{1}{EI_z}\left[w_0(x-f)r(x-f) + P r(x-(b+c+f))\right] + C_3$$

(2)

$$\Rightarrow \frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = -\frac{1}{EI_z}\left[\frac{w_0}{2}(x-f)^2 r(x-f) + P r(x-(b+c+f))\,r(x-(b+c+f))\right] + C_3 x + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{y}}{dx} = -\frac{1}{EI_z}\left[\frac{w_0}{6}(x-f)^3 r(x-f) + \frac{P}{2}(x-(b+c+f))^2 r(x-(b+c+f))\right] + C_3\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_1$$

$$\Rightarrow \hat{y} = -\frac{1}{EI_z}\left[\frac{w_0}{24}(x-f)^4 r(x-f) + \frac{P}{6}(x-(b+c+f))^3 r(x-(b+c+f))\right] + C_3\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_0$$

(1)

luego $\left.\frac{d\hat{y}}{dx}\right|_0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ $\quad \hat{y}(0) = 0 \Rightarrow C_0 = 0$ (1)

$$\left.\frac{d^3\hat{y}}{dx^3}\right|_{a+b+c+f} = 0 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{EI_z}\left[w_0(a+b+c) + P\right] = 0.053891 \quad (1)$$

$$\left.\frac{d^2\hat{y}}{dx^2}\right|_{a+b+c+f} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{w_0}{2}(a+b+c)^2 + Pa\right] - C_3(a+b+c+f)$$

$$= -9.33419 * 10^{-2} \quad (1)$$

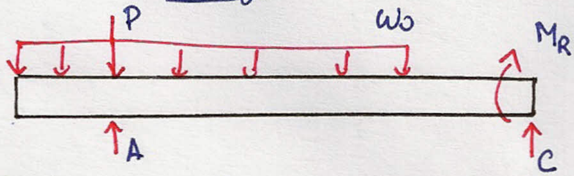
5] Calculando $\hat{y}(A) = -\frac{1}{EI_z}\left[\frac{w_0}{24}(b+c)^4\right] + \frac{c_3}{6}(b+c+f)^3 + \frac{c_2}{2}(b+c+f)^2$

$= -0.11191 \text{ m} < -d$ luego la viga si hace contacto con el apoyo en A (3)

-0.11191

(ii) Hay que considerar el contacto en A

DCL Viga



(2)

equilibrio

$$(\star)\quad \begin{cases} C = P + w_0(a+b+c) - A \\ M_R = (P-A)(b+c+f) + w_0(a+b+c)\left[f + \frac{(a+b+c)}{2}\right] \end{cases}$$ (1) (1)

El problema es hiperestático, luego es necesario considerar $\hat{y}(x)$ para calcular A.
En el problema $\hat{y}(x)$ se agrega A como carga externa y se considera la restricción adicional $\hat{y}(A) = -d$ (3)

Se debe solucionar $\frac{d^4\hat{y}}{dx^4} = -\frac{1}{EI_z}w(x)$, pero No es necesario calcular de nuevo $\hat{y}$ y sus derivadas, basta reemplazar en las expresiones en (i) P por P−A,

luego

$$\hat{y}(x) = -\frac{1}{EI_z}\left[\frac{w_0}{24}(x-f)^4 r(x-f) + \frac{(P-A)}{6}(x-(b+c+f))^3 r(x-(b+c+f))\right]$$
$$+ c_3\frac{x^3}{6} + c_2\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_0$$

las condiciones de borde son

$\hat{y}(0) = 0 \quad \frac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0 \quad \frac{d^3\hat{y}}{dx^3}(a+b+c+f) = 0 \quad \frac{d^2\hat{y}}{dx^2}(a+b+c+f) = 0$

$\hat{y}(A) = -d$

luego $\frac{d\hat{y}}{dx}(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \qquad \hat{y}(0) = 0 \Rightarrow c_0 = 0$

$$\frac{d^3y^1}{dx^3}(a+b+c+f)=0 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{EI_z}\left[\omega_0(a+b+c)+P-A\right]$$

$$= 5.389105 * 10^{-2} - 2.763644 * 10^{-6} A$$ 2

$$\frac{d^2y^1}{dx^2}(a+b+c+f)=0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{EI_z}\left[\frac{\omega_0}{2}(a+b+c)^2 + (P-A)a\right] - C_3(a+b+c+f)$$

$$= -9.3342 * 10^{-2} + 5.527288 * 10^{-6} A$$ 2

luego $y^1(A) = -d$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{EI_z}\left[\frac{\omega_0}{24}(b+c)^4\right] + \frac{C_3}{6}(b+c+f)^3 + \frac{C_2}{2}(b+c+f)^2 = -d$$

$$\Leftrightarrow -2.91478 * 10^{-3} + (5.389105 * 10^{-2} - 2.763644 * 10^{-6} A) * 1.33333$$
$$+ (-9.3342 * 10^{-2} + 5.527288 * 10^{-6} A) * 2 = -0.01$$

1 $\Rightarrow A = 14619.8\ N > 0$ lo que es correcto

$\Rightarrow$ ★ $C = 4880.207\ N$ 1 $M_R = 4535.41\ Nm$ 1

ⓒ En la zona B se necesita calcular M, para eso se puede usar

$$\left.\frac{d^2y^1}{dx^2}\right|_{c+f} = -\frac{1}{EI_z}\frac{\omega_0 c^2}{2} + C_3(c+f) + C_2$$ 1

$$\Rightarrow M = EI_z\frac{d^2y^1}{dx^2} = -280.14\ Nm$$ 1

En la sección distancia máxima a eje neutro es $y_{max} = 9 - \bar{y}_{tot}$
$= 5.3354\ cm$

$$\Rightarrow \sigma_x = -M\frac{y_{max}}{I_z} = 8.67\ MPa$$ tracción 1

3