

Auxiliar 1

Profesor: Rafael Correa.

Auxiliares: Diego Gramusset, Sebastián Tapia.

Definición 1 (π -sistema). Sea X un conjunto y $P \subseteq \mathcal{P}(X)$, P se dirá π -sistema si $\forall A, B \in P$, se tiene que $A \cap B \in P$.

Definición 2 (λ -sistema). Sea X un conjunto e $I \subseteq \mathcal{P}(X)$, I se dirá λ -sistema si:

- $X \in I$.
- Si $A \in I$, $A^c \in I$.
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ son disjuntos, entonces $\cup A_n \in I$.

Definición 3 (λ -sistema engendrado). Sea $P \subseteq \mathcal{P}(X)$, se define el λ -sistema engendrado por P :

$$\lambda(P) = \bigcap_{I \in Y} I,$$

donde $Y = \{I \subseteq X \mid I \supseteq P, I \text{ es } \lambda\text{-sistema}\}$

Como observación es fácil notar que intersección arbitraria de π -sistemas (λ -sistema resp.) es π -sistemas (λ -sistema resp.).

P1. Sea X un conjunto y $T = \{A \subseteq X \mid A \text{ o } A^c \text{ es numerable}\}$. Muestre que T es una σ -álgebra.

P2. Siga el siguiente esquema para demostrar el π, λ -Teorema:

- (a) I es λ -sistema y π -sistema ssi I es una σ -álgebra.
- (b) Si P es π -sistema, entonces $\sigma(P) = \lambda(P)$.
 Indicación: Considere el conjunto $\kappa(A) : \{B \subseteq X : A \cap B \in \lambda(P)\}$, muestre que $B \in \kappa(A)$ ssi $A \in \kappa(B)$ y que para $A \in \lambda(P)$, $\kappa(A)$ es un λ -sistema.
- (c) (π, λ -Teorema) Sea P un π -sistema y I un λ -sistema tal que $P \subseteq I$, entonces $\sigma(P) \subseteq I$.

P3. Sea (X, T) un espacio medible y consideremos $C \subseteq \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$ una colección tal que $\sigma(C) = \beta(\overline{\mathbb{R}})$. Entonces $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible ssi para todo $A \in C$, $f^{-1}(A) \in T$.

P4. Sea A la tribu generada por los singletons en un conjunto X no numerable. Muestre que una función $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es $A - \beta(\overline{\mathbb{R}})$ medible si y sólo si es constante salvo a lo más en un conjunto numerable.