

**MA3701-Optimización****Profesores:** Jorge Amaya A., Natalia Ruiz G.**Auxiliares:** Guillermo González C., Leonel Huerta R., Marco Oporto

# Auxiliar 12

31 de julio del 2015

**P1.** La función de Cobb-Douglas es muy utilizada en economía para representar la relación entre los inputs y los outputs de una firma. Toma la forma  $Y = AL^\alpha K^\beta$ , donde  $Y$  representa los outputs,  $L$  el trabajo y  $K$  el capital. Esta formulación puede ser aplicada a la utilidad y toma la forma  $u(x) = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$  donde los exponentes son positivos y suman 1. Considere el problema de maximización de la utilidad:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & x^\alpha y^{1-\alpha} \\ \text{s.a.} \quad & p_1 x + p_2 y = w \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

Donde  $p_1, p_2 > 0$  son los precios y  $w > 0$  el presupuesto.

- Escriba las condiciones de KKT y encuentre una solución de ellas, en función de  $p_1, p_2, w$  y  $\alpha$ .
- ¿Se puede decir que esta solución es óptima para el problema original? Justifique.
- Encuentre el multiplicador  $\lambda$ , en función de  $p_1, p_2, w$  y  $\alpha$ .

**P2.** Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & (x \ y) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (1 \ 4) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3 \\ \text{s.a.} \quad & 2x - 2y = 1 \\ & (x + y)^2 \leq 1 \end{aligned}$$

- Encuentre condiciones sobre  $a_{11}, a_{12}$  y  $a_{22}$  bajo las cuales el problema es convexo y tiene una única solución. Justifique en ambos casos haciendo uso de las restricciones.
- Demuestre que los gradientes de las restricciones son linealmente independientes en todo punto factible del problema.
- Encuentre la solución del problema para el caso  $a_{11} = -1$ ,  $a_{12} = 1$ ,  $a_{22} = -2$ , usando las condiciones de optimalidad de KKT.