MA3701-Optimización
Profesores: Jorge Amaya A., Natalia Ruiz G.
Auxiliares: Guillermo González C., Leonel Huerta R., Marco Oporto

Apuntes Auxiliar 6

22 de Abril

P1. Resuelva el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 \geq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución: Usemos Simplex para resolver el problema.

Escribamos el problema en su forma estándar:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 20 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

No es claro que solución básica proponer para iterar Simplex, así que realicemos la fase 1.

El problema auxiliar es:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & x_{a1} + x_{a2} \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 + x_{a1} = 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 - x_4 x_{a2} = 20 \\ & x_1, x_2, x_{a1}, x_{a2} \geq 0 \end{aligned}$$

La tabla asociada es:

x_{a1}	x_{a2}	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	0	-3	-5	1	1	32
1	0	1	2	-1	0	12
0	1	2	3	0	-1	20

Dejemos que x_1 entre a la base, luego la variable que debe salir es x_{a2} ($\text{mín}\{\frac{12}{1}, \frac{20}{2}\} = \frac{20}{2}$).

Reordenando y pivoteando, obtenemos:

x_{a1}	x_1	x_{a2}	x_2	x_3	x_4	
0	0	3/2	-1/2	1	-1/2	2
1	0	-1/2	1/2	-1	1/2	2
0	1	1/2	3/2	0	-1/2	10

Aún no encontramos el óptimo. Dejamos que x_2 entre a la base y x_{a1} es la variable que sale.

Reordenando y pivoteando:

x_2	x_1	x_{a2}	x_{a1}	x_3	x_4	
0	0	1	1	0	0	0
1	0	-1	2	-2	1	4
0	1	2	-3	3	-2	4

Y ahora si estamos en un punto óptimo!

Luego, $x_1 = x_2 = 4$ $x_3 = x_4 = 0$ es factible en el problema inicial.

Pasamos a la fase 2 de Simplex.

$$\implies \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\implies \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\implies \quad -C_B^T B^{-1} b = -12 \qquad -(C_B^T B^{-1} N - C_N^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Y nos damos cuenta de que los costos reducidos asociados a las variables no básicas son no negativos, luego el punto en el que estamos es óptimo.

Sigue que el óptimo del problema es:

$$(4, 4, 0, 0)$$

P2. ***Control 1, Otoño 2012.***

Considere el siguiente cuadro (tableu) del método Simplex, que proviene de la resolución de un problema de la forma:

$$\text{mín}\, c^T x, \quad \text{s.a.} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} -\gamma & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 4 \\ \alpha & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \theta \end{array}$$

Indique rangos de los parámetros, de manera que:

(a) La solución es óptima y es única (¿Cuál es?).

(b) El problema es no acotado (¿Cuál es dirección extrema correspondiente a este no acotamiento?).

(c) La solución en curso es óptima, pero no es única (indique el conjunto solución).

(d) La solución en curso es factible, pero no es óptima (realice, a partir de ella, una iteración más).

Si el cuadro es óptimo y el vector de costos originales es $c^T = (1, 1, 1, 1, -1)$.

(e) Deduzca el valor (o rango) de θ.

(f) Deduzca el valor (o rango) de α.

Solución: La pauta de esta pregunta la encuentran en la pauta del control respectivo. Está en el compilado de controles que subió Guillermo a "Material Alumnos".

P3. Resuelva el siguiente problema usando Simplex:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & \frac{x_1+1}{x_2+2} \\ \text{s.a.} \quad & x_1+x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Solución: Sean $z = \dfrac{1}{x_2+2}$, $y_1 = \dfrac{x_1}{x_2+2}$ e $y_2 = \dfrac{x_2}{x_2+2}$. Se cumple la relación $2z + y_2 = 1$. Luego (P) es equivalente a (P')

$$(P') \begin{cases} \min & y_1 + z \\ \text{s.a.} & y_1 + y_2 \le z \\ & 2z + y_2 = 1 \\ & y_1,\ y_2,\ z \ge 0 \end{cases}$$

Por lo tanto se resuelve (P'), agregando variables de holgura:

$$(P') \begin{cases} \min & y_1 + z \\ \text{s.a.} & y_1 + y_2 - z + s_1 = 0 \\ & 2z + y_2 = 1 \\ & y_1,\ y_2,\ z,\ s_1 \ge 0 \end{cases}$$

Luego

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = (1,0,1,0)$$

Escogiendo a z y a s_1 en la base se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

así

$$C_B{}^T = (1,\ 0), \quad C_N{}^T = (1,\ 0)$$

$\Rightarrow$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1}N = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$B^{-1}b = \left(\tfrac{1}{2},\ \ \tfrac{1}{2} \right), \quad -C_B{}^T B^{-1} b = -(1,\ 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}$$

Luego

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \boxed{-\frac{3}{2}} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc|c} \frac{4}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline -\frac{1}{3} & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

Por lo tanto la solución de (P') es:

$$y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{1}{3}, \quad s_1 = 0$$

Reemplazando en las variables de (P) se tiene que la solución es:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{3}$$

P4. Lleve el siguiente problema a su forma canónica:

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & x_1 + |x_2| + x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 0 \end{array}$$

Solución: Notar que $|x_2| = \text{máx}\{x_2, -x_2\}$ luego la función objetivo puede escribirse como

$$\text{máx}\{x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3\}$$

y el problema se transforma en

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & \text{máx}\{x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2 + x_3\} \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 0 \end{array}$$

y este problema a su vez puede escribirse como

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & x_4 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq x_4 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \leq x_4 \end{array}$$

Agregando variables de holgura se obtiene

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & x_4 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 + x_5 = 2 \\ & 2x_1 + x_3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 0 \\ & x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_7 = 0 \\ & x_5, x_6, x_7 \geq 0 \end{array}$$

y finalmente desdoblando las variables irrestrictas, es decir, escribiendo $x_i = y_i - z_i$ con $y_i, z_i \geq 0$ $\forall i = 1, ..., 4$, se tiene

$$\begin{array}{rc} \text{mín} & y_4 - z_4 \\ \text{s.a.} & y_1 - z_1 + y_2 - z_2 + x_5 = 2 \\ & 2y_1 - 2z_1 + y_3 - z_3 = 0 \\ & y_1 - z_1 + y_2 - z_2 + y_3 - z_3 - y_4 + z_4 + x_6 = 0 \\ & y_1 - z_1 - y_2 + z_2 + y_3 - z_3 - y_4 + z_4 + x_7 = 0 \\ & y_1, ... y_4, z_1, ..., z_4, x_5, x_6 x_7 \geq 0 \end{array}$$