

**MA3701-Optimización****Profesores:** Jorge Amaya A., Natalia Ruiz G.**Auxiliares:** Guillermo González C., Leonel Huerta R., Marco Oporto

# Apuntes Auxiliar 4

08 de Abril del 2015

## 1. Sobre Simplex...

Antes de pasar a los problemas, unos cuantos comentarios sobre Simplex. Tengan en cuenta que son mis apuntes para la auxiliar (sólo que digitalizados) y distan mucho de ser una referencia formal y/o rigurosa.

Notar que los siguientes comentarios aplican para resolver problemas de **minimización**, ¿Qué pasos cambian en un problema de maximización?

En general, queremos resolver un problema de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & c^t \cdot x \\ \text{s.a.} & A \cdot x = b \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

Digamos que tenemos  $m$  restricciones.

Si fijamos  $m$  variables iguales a cero, nos encontraremos en un vértice del poliedro factible. Notemos que cuando fijamos una variable igual a cero, estamos activando una restricción. Llamaremos:

- Básicas, a las variables no nulas, el vector lo denotamos  $x_B$ .
- No básicas, a las variables nulas, el vector lo denotamos  $x_R$ .

En cada iteración de Simplex, lo que queremos hacer es determinar si el vértice en el que nos encontramos es óptimo y, en caso contrario, movernos a otro vértice. Por lo tanto, en cada iteración queremos responder 3 preguntas:

- ¿Es óptimo el vértice?

Si la respuesta es no, entonces nos preguntamos:

- ¿Qué variable sale de la base?
- ¿Qué variable entra a la base?

Si el vértice si es óptimo, lo reportamos, paramos de iterar y celebramos.

Para hacer estas preguntas exigimos que el problema esté en forma estándar, es decir:

- Los coeficientes asociados a las variables básicas (en la función objetivo) sean nulos.
- Los coeficientes asociados a las variables básicas (en las restricciones) correspondan a un vector canónico (y formen una base de  $\mathbb{R}^m$ ).

¿Por qué queremos tener el problema en forma canónica?

Porque así podemos escribir sólo los coeficientes en una tabla y obtener información rápidamente sólo mirando la tabla, por ejemplo:

- Los coeficientes que acompañan a las variables no básicas (en la función objetivo) son los costos reducidos:  $\bar{c}_R$

- Los lados derechos de las restricciones corresponden a los valores que toman las variables básicas... (la variable asociada a dicha restricción).
- El lado derecho en la fila que corresponde a la función objetivo será el valor que toma la función objetivo (con signo cambiado).

*(Esto último no está muy bien explicado y no debería quedar claro todavía, pero si después de los ejemplos..)*

Nos falta un último punto a considerar antes de pasar a resolver problemas. ¿Cómo respondemos las preguntas que nos hicimos antes?

Consideraremos los siguientes criterios (durante la auxiliar):

- La solución es óptima si  $\bar{c}_i \geq 0$ ,  $\forall i$  no básico.
- Entra a la base la variable  $x_j$  tal que:

$$\bar{c}_j = \min\{\bar{c}_j : \bar{c}_j < 0\}$$

- Sale de la base la variable  $x_i$  tal que

$$\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}} = \min_{\bar{a}_{kj} > 0} \left\{ \frac{\bar{b}_j}{\bar{a}_{kj}} \right\}$$

Donde  $x_j$  es la variable que entra a la base,  $\bar{b}_i$  corresponde al lado derecho de la restricción  $i$  y  $\bar{a}_{ij}$  es el coeficiente que acompaña a la variable  $x_j$  en la restricción  $i$  (si  $\bar{a}_{kj} \leq 0$ ,  $\forall k$ , el problema será no acotado).

*(Acá hay cosas que no están del todo bien definidas, es normal que tampoco quede muy claro...)*

## 2. Problemas

**P1.** Recuerde el problema de optimización visto en clases:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 7x_1 + 6x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3x_1 + x_2 \leq 120 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ & x_1 \leq 35 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Resuelva el problema iterando el algoritmo de Simplex mediante la utilización de tablas.

**Solución:** Pasamos primero el problema a su forma estándar agregando variables de holgura. Escribimos además el problema como un problema de minimización para usar simplex:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -7x_1 - 6x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 = 120 \\ & x_1 + 2x_2 + x_4 = 160 \\ & x_1 + x_5 = 35 \\ & x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

Escribimos la tabla correspondiente (*analizar donde escribimos cada coeficiente*):

| $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_1$ | $x_2$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0     | -7    | -6    | 0   |
| 1     | 0     | 0     | 3     | 1     | 120 |
| 0     | 1     | 0     | 1     | 2     | 160 |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 35  |

Iteramos:

### Iteración 1:

- ¿Es óptimo?

No. Existen costos reducidos de variables no básicas menores a 0.

- ¿Menor costo reducido? -7

$\Rightarrow x_1$  entra a la base.

- $\min\{\frac{120}{3}, \frac{160}{1}, \frac{35}{1}\} = \frac{35}{1}$

$\Rightarrow x_5$  sale de la base.

La nueva tabla es:

| $x_3$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_2$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | -7    | 0     | -6    | 0   |
| 1     | 0     | 3     | 0     | 1     | 120 |
| 0     | 1     | 1     | 0     | 2     | 160 |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 35  |

Pivoteamos para obtener la identidad al lado izquierdo y 0 en los coeficientes de las variables básicas (en la función objetivo), es decir, para tener el problema en forma estándar. Así:

| $x_3$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_2$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0     | 7     | -6    | 245 |
| 1     | 0     | 0     | -3    | 1     | 15  |
| 0     | 1     | 0     | -1    | 2     | 125 |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 35  |

**Iteración 2:**

- ¿Es óptimo?

No. Existen costos reducidos de variables no básicas menores a 0.

- ¿Menor costo reducido? -6

$\Rightarrow x_2$  entra a la base.

- $\min\{\frac{125}{3}, \frac{15}{1}\} = \frac{35}{1}$

$\Rightarrow x_3$  sale de la base.

La nueva tabla es:

| $x_2$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_3$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| -6    | 0     | 0     | 7     | 0     | 245 |
| 1     | 0     | 0     | -3    | 1     | 15  |
| 2     | 1     | 0     | -1    | 0     | 125 |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 35  |

Pivoteamos para obtener forma estándar:

| $x_2$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_5$ | $x_3$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0     | -11   | 6     | 335 |
| 1     | 0     | 0     | -3    | 1     | 15  |
| 0     | 1     | 0     | 5     | -2    | 95  |
| 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 35  |

**Iteración 3:**

- ¿Es óptimo?

No. Existen costos reducidos de variables no básicas menores a 0.

- ¿Menor costo reducido? -11

$\Rightarrow x_5$  entra a la base.

- $\min\{\frac{95}{5}, \frac{35}{1}\} = \frac{35}{1}$

$\Rightarrow x_4$  sale de la base.

La nueva tabla es:

| $x_2$ | $x_5$ | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0     | -11   | 0     | 0     | 6     | 335 |
| 1     | -3    | 0     | 0     | 1     | 15  |
| 0     | 5     | 0     | 1     | -2    | 95  |
| 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 35  |

Pivoteamos para obtener forma estándar:

| $x_2$ | $x_5$ | $x_1$ | $x_4$ | $x_3$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| 0     | 0     | 0     | 11/5  | 8/5   | 544 |
| 1     | 0     | 0     | 3/5   | -6/5  | 72  |
| 0     | 1     | 0     | 1/5   | -2/5  | 19  |
| 0     | 0     | 1     | -1/5  | 2/5   | 16  |

**Iteración 4:**

- ¿Es óptimo?

Si! No hay costos reducidos de variables no básicas negativos!

En el óptimo:

$x_1 = 16$  ,  $x_2 = 72$  y la función objetivo vale  $-544$  con estos valores de  $x_1$  y  $x_2$ .

**P2.** Suponga que usted posee una gran fábrica manufacturera que produce camisas y pantalones. Para producir una camisa necesita disponer de 1 trabajador durante un día de trabajo, quién gastará una lámina de tela, mientras que para producir un pantalón necesita enviar a un trabajador, pero usar 3 láminas de tela. Usted sólo dispone de 5 trabajadores en su fábrica y de 9 láminas de tela al día. Si vende cada camisa en \$20.000 y cada pantalón en \$30.000, ¿Cuál es la cantidad óptima de camisas y pantalones a producir diariamente?

Con el fin de complicar el problema, a costa de perder realismo, suponga que trabajadores, láminas de tela, pantalones y camisas son cantidades no necesariamente enteras (variables continuas).

**Solución:**

Modelamos el problema como:

$$\begin{aligned} \text{máx} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Donde:

$x_1$ : representa la cantidad de camisas a producir.

$x_2$ : representa la cantidad de pantalones a producir.

Pasamos a forma estándar y escribimos el problema de minimización:

$$\begin{aligned} \text{mín} \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Escribimos el “tableau” asociado y comenzamos a iterar:

| $x_3$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_2$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| 0     | 0     | -2    | -3    | 0 |
| 1     | 0     | 1     | 1     | 5 |
| 0     | 1     | 1     | 3     | 9 |

**Iteración 1:**

- ¿Es óptimo?  
No. Existen costos reducidos negativos.
- Menor costo reducido: -3  
 $\Rightarrow x_2$  entra a la base.
- $\min\{\frac{5}{1}, \frac{9}{3}\} = \frac{9}{3}$   
 $\Rightarrow x_4$  sale de la base.

El tableau queda:

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_4$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| 0     | -3    | -2    | 0     | 0 |
| 1     | 1     | 1     | 0     | 5 |
| 0     | 3     | 1     | 1     | 9 |

Pivoteamos para obtener forma estándar:

| $x_3$ | $x_2$ | $x_1$ | $x_4$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| 0     | 0     | -1    | 1     | 9 |
| 1     | 0     | 2/3   | -1/3  | 2 |
| 0     | 1     | 1/3   | 1/3   | 3 |

### Iteración 2:

- ¿Óptimo?

No. Existen costos reducidos negativos.

- Menor costo reducido: -1

$\Rightarrow x_1$  entra a la base.

- $\min\{\frac{2}{2/3}, \frac{3}{1/3}\} = \frac{2}{2/3}$

$\Rightarrow x_3$  sale de la base.

El tableau queda:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |   |
|-------|-------|-------|-------|---|
| -1    | 0     | 0     | 1     | 9 |
| 2/3   | 0     | 1     | -1/3  | 2 |
| 1/3   | 1     | 0     | 1/3   | 3 |

Pivoteamos para obtener forma estándar:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |    |
|-------|-------|-------|-------|----|
| 0     | 0     | 3/2   | 1/2   | 12 |
| 1     | 0     | 3/2   | -1/2  | 3  |
| 0     | 1     | -1/2  | 1/2   | 2  |

### Iteración 3:

- ¿Óptimo?

Si! NO hay variables básicas con costos reducidos negativos.

$\Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 = 2$

Por lo tanto, en el óptimo hacemos 3 camisas, 2 pantalones y ganamos \$120.000.

- P3.** El dueño de una pastelería desea determinar las cantidades óptimas a producir de cada uno de sus 3 productos: pan (dulce), berlines y tortas. La pastelería cuenta con una fórmula secreta y para producir cada uno de estos productos, requiere sólo 2 insumos: harina y azúcar. Por esto, es una panadería muy famosa y todo lo que produce, lo vende. Lamentablemente, estos insumos son limitados y sólo se cuenta con 24 unidades de harina y 60 de azúcar. Los datos de producción de cada producto junto con el precio de venta (fijado por las autoridades reguladoras de pastelerías) se encuentran descritos en la siguiente tabla:

|                 | Pan | Berlines | Tortas | Cantidad disponible |
|-----------------|-----|----------|--------|---------------------|
| Harina          | 0.5 | 2        | 1      | 24                  |
| Azúcar          | 1   | 2        | 4      | 60                  |
| Precio de venta | 6   | 14       | 13     |                     |

Plantee el problema de optimización del pastelero y encuentre las cantidades óptimas a producir de cada pastel.

**Solución:**

El problema de optimización a resolver es:

$$\begin{aligned}
 &\text{máx} && 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\
 &\text{s.a.} && \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 \\
 &&& x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60 \\
 &&& x_i \geq 0, \forall i
 \end{aligned}$$

Donde cada variable representa:

$x_1$ : cantidad de pan.

$x_2$ : cantidad de berlines.

$x_3$ : cantidad de tortas.

Agregando variables de holgura para tener el problema en forma estándar, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 &&& -6x_1 - 14x_2 - 13x_3 \\
 &\text{s.a.} && \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 24 \\
 &&& x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 60 \\
 &&& x_i \geq 0, \forall i
 \end{aligned}$$

Resolver usando Simplex queda propuesto para el lector.

Éxito en su estudio!