Pauta Pregunta 3

Control 2

David Gómez, Matías Gómez

(a) Usando el T.C.V. Si x = H(y) = e^y, entonces y = $H^{-1}(x) = ln(x)$. x solo puede tomar valores mayores a cero, sino se indefine el logaritmo, por lo que la función de densidad debe estar restringida usando una indicatriz. En el caso en que x sea negativo, la f. de densidad es cero.

$$\begin{aligned} f_x(x) &= f_y(H^{-1}(x)) * |\frac{dH^{-1}(x)}{dx}| * 1_{(0,\infty)}(x) \\ &= f_y(ln(x)) * \frac{1}{x} * 1_{(0,\infty)}(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}\sigma} * e^{\frac{-(ln(x)-u)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{x} * 1_{(0,\infty)}(x) \end{aligned}$$

(b)

$$E(X^s) = E(e^{ln(X^s)}) = E(e^{sY}) = M_y(s) \tag{1}$$

Usando la tabla, se busca la f.g.m para Y (Distribución normal).

$$M_y(s) = e^{us+\frac{\sigma^2 s^2}{2}} = E(X^s) \tag{2}$$

Para encontrar la esperanza, basta evaluar con s=1

$$E(X) = e^{u+\frac{\sigma^2}{2}} \tag{3}$$

Para la varianza, se requiere encontrar $E(X^2)$, con lo que evaluamos en s=2.

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = e^{2u+2\sigma^2} - e^{2u+\sigma^2} \tag{4}$$

(c)

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{x\sqrt[2]{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(ln(x)-u)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{x} e^{\frac{-(ln^2(x)-2ln(x)u+u^2)}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}\sigma} \int_0^\infty \frac{1}{x} e^{tx} e^{\frac{-ln^2(x)}{2\sigma^2}} e^{\frac{uln(x)}{\sigma^2}} e^{-u^2} dx
\end{aligned}$$

Tenemos 4 exponenciales a las cuales llamaremos A,B,C y D, respectivamente. B tiene un exponente siempre negativo (logaritmo elevado al cuadrado y signo menos en un comienzo). C se puede expresar como $x^{\frac{u}{\sigma^2}}$, con lo que deja de ser exponencial. D es una constante. Por lo tanto, A es lo único que podría hacer que la integral diverja. Eso ocurre cuando su exponente es positivo. Dado que x se mueve por valores mayores o iguales a cero, se debe imponer que t no sea positivo para que el exponente sea negativo (o cero) y la integral exista. Por lo tanto, $M_X(t)$ no esta definida si $t > 0$.

No basta con plantear la integral y decir que $\int_0^\infty e^{tx} f_x(x)dx$ diverge si $t > 0$. Si fuera así, entonces no existiría ninguna distribución X tal que $M_X(t)$ exista con $t > 0$, lo que es una contradicción. Es por ello que es necesario desarrollar la función de densidad y trabajar el exponente de la exponencial, pues en otros casos (como la normal), se logra anular que t no haga que diverja la integral siendo positivo.

(d) Si $V = \alpha + \beta U = H(U)$, entonces

$$U = \frac{V - \alpha}{B} = H^{-1}(V) \tag{5}$$

Usando el T.C.V tenemos que :

$$\begin{aligned}
f_V(U) &= f_U(H^{-1}(V)) * |\frac{dH^{-1}(V)}{dv}| \\
&= f_U(\frac{V-\alpha}{B}) * \frac{1}{\beta} \\
&= \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}(\sigma\beta)} * e^{\frac{-(\frac{V-\alpha}{\beta}-u)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt[2]{2\pi}(\sigma\beta)} * e^{\frac{-(V-(\alpha+\beta u)^2)}{2(\beta\sigma)^2}}
\end{aligned}$$

Lo cual corresponde a una normal de parámetros $(\alpha + \beta u, \sigma^2\beta^2)$. Para obtener la distribución de aX^b se define Z como $ln(aX^b)$.

$$ln(aX^b) = ln(a) + bln(X) = ln(a) + bY \tag{6}$$

Como Y es Normal, podemos aplicar lo recién demostrado y concluir que Z distribuye como $N(ln(a)+bu, b^2\sigma^2)$. Entonces aX^b distribuye como una Log-Normal de parámetros $(ln(a) + bu, b^2\sigma^2)$ puesto que $Z = ln(aX^b)$ distribuye como Normal, según lo visto en (a).

(e) Se define $W = ln(Z)$. Entonces se tiene que :

$$W = ln(Z) = ln(X_1X_2) = ln(X_1) + ln(X_2) = Y_1 + Y_2 \tag{7}$$

Como X_1 y X_2 son log-normales, entonces Y_1 e Y_2 distribuyen como Normales con los mismos parámetros que X_1 y X_2, respectivamente. Dado que ambos son independientes, Y_1 e Y_2 también lo son. La suma de variables independientes que distribuyen como una Normal, es otra Normal con parámetros $(u_1 + u_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$. Así obtenemos la distribución de W. Ahora, como W es el logaritmo natural de Z y distribuye como la normal que se dijo recientemente, se concluye que Z es una log-normal con parámetros $(u_1 + u_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.