Control 2

MA3403 - Probabilidades y Estadistica
Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Enrique Calisto & Martín Castillo
12 de mayo de 2015

P1. Sea (X,Y) vector aleatorio con densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & ,0 < x < y \\ 0 & ,\sim \end{cases}$$

a) Plantee las integrales para calcular $\mathbb{P}(X > 2|Y < 4)$.
R:
Por definición:

$$\mathbb{P}(X > 2|Y < 4) = \frac{\mathbb{P}(X > 2 \text{ y } Y < 4)}{\mathbb{P}(Y < 4)} = \frac{\displaystyle\int_2^4 \int_x^4 e^{-y} dy dx}{\displaystyle\int_0^4 \int_x^4 e^{-y} dy dx}.$$

b) Calcule $\mathbb{E}(X|Y)$, ¿Son X eY independientes?
R:
Sabemos que $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$. Conocemos $f_{X,Y}$, nos falta deducir f_Y:

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f_{X,Y}(x,y)dx = \int_0^y e^{-y}dx = ye^{-y}.$$

Claramente X e Y no son independientes. Calculando:

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \int_0^\infty x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^y x\frac{e^{-y}}{ye^{-y}}dx = \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{2}(y^2 - 0^2) = \frac{y}{2}.$$

c) Usando TCV determine la función densidad de $Z = Y - X$.
R:
Usamos la transformación:

$$\begin{matrix} Z = X - Y \\ W = Y \end{matrix} \iff \begin{matrix} X = Z + W \\ Y = W \end{matrix}.$$

Así:

$$G(z,w) = (z+w, w),$$

Y por TCV:

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(z+w,w) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} e^{-w} & ,-w < z < 0 \\ 0 & ,\sim \end{cases}$$

Finalmente:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^\infty f_{Z,W}(z,w)dw = \begin{cases} \displaystyle\int_{-z}^\infty e^{-w}dw & ,z < 0 \\ 0 & ,\sim \end{cases} = \begin{cases} e^z & ,z < 0 \\ 0 & ,\sim \end{cases}$$

P2. *a)* Sean $X \sim Poiss(\lambda)$, $Y \sim Poiss(\delta)$. Donde X e Y son independientes.

1) Muestre que:

$$\mathbb{P}(X+Y=n)=\frac{e^{-(\lambda+\delta)}(\lambda+\delta)^n}{n!}.$$

R:
Usamos probabilidades totales:

$$\mathbb{P}(X+Y=n)=\sum_{i=0}^{\infty}\underbrace{\mathbb{P}(X+Y=n|Y=i)}_{\mathbb{P}(X=n-i)}\mathbb{P}(Y=i)=\sum_{i=0}^{n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-i}}{(n-i)!}\cdot e^{-\delta}\frac{\delta^i}{i!}$$

$$=e^{-(\lambda+\delta)}\cdot\frac{1}{n!}\overbrace{\sum_{i=0}^{n}\underbrace{\frac{n!}{i!(n-i)!}}_{\binom{n}{i}}\delta^i\lambda^{n-i}}^{(\lambda+\delta)^n}=\frac{e^{-(\lambda+\delta)}(\lambda+\delta)^n}{n!},$$

2) Calcule

$$\mathbb{P}(X=J|X+Y=n).$$

R:
Usamos Bayes:

$$\mathbb{P}(X=J|X+Y=n)=\mathbb{P}(X+Y=n|X=J)\frac{\mathbb{P}(X=J)}{\mathbb{P}(X+Y=J)}=\frac{\mathbb{P}(Y=n-J)\mathbb{P}(X=J)}{\mathbb{P}(X+Y=n)}$$

$$=\frac{\frac{e^{-\delta}\delta^{n-J}}{(n-J)!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^J}{J!}}{\frac{e^{-(\lambda+\delta)}(\lambda+\delta)^n}{n!}}=\binom{n}{J}\frac{\delta^{n-J}\lambda^J}{(\lambda+\delta)^n}.$$

3) Muestre que para toda función f, se cumple:

$$\mathbb{E}(X\cdot f(X))=\lambda\cdot\mathbb{E}(f(X+1)).$$

R:
Por definición:

$$\mathbb{E}(X\cdot f(X))=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot f(i)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot f(i)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}=\sum_{i=1}^{\infty}f(i)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{(i-1)!}=\lambda\sum_{i=1}^{\infty}f(i)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!}$$

$$=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}f(j+1)\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^j}{j!}=\lambda\cdot\mathbb{E}(f(X+1)).$$

b) Sean X e Y v.a.'s con covarianza $Cov(X,Y)$ conocida. Sean $X'=a+bX$ y $Y'=c+dY$. Determine $Cov(X',Y')$ en función de $Cov(X,Y)$.
R:

$$Cov(a+bX,c+dY)=\underbrace{Cov(a,c)}_{0}+d\cdot\underbrace{Cov(a,Y)}_{0}+b\cdot\underbrace{Cov(X,a)}_{0}+bd\cdot Cov(X,Y)=bd\cdot Cov(X,Y).$$

P3. *a*) En Economía, Finanzas y Biología se dice que un agente, con función de utilidad u, frente a una v.a. X es:

$$\text{Averso al Riesgo}\iff u\left(\mathbb{E}(X)\right)>\mathbb{E}(u(X)),$$

$$\text{Amante del Riesgo}\iff u\left(\mathbb{E}(X)\right)<\mathbb{E}(u(X)),$$

$$\text{Neutral al Riesgo}\iff u\left(\mathbb{E}(X)\right)=\mathbb{E}(u(X)).$$

Indique en cada caso el tipo de agente.

1) $u(t) = t \cdot H - t^2$, frente a $T \sim exp(\lambda)$. Con H una constante positiva.
R:
Calculando:

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{\lambda},$$

$$\mathbb{E}(u(T)) = H\mathbb{E}(T) - \mathbb{E}(T^2) = H\mathbb{E}(T) - (Var(T) + \mathbb{E}(T)^2) = \frac{H}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$u(\mathbb{E}(T)) = \frac{H}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2}.$$

El agente es averso al riesgo.

2) $u(x) = \ln(x)$, frente a $X \sim U(0,1)$, además calcule la densidad de $u(X)$.
R: Encontremos la densidad de $u(X)$, para eso primero encontremos su distribución:

$$F_{u(X)}(t) = \mathbb{P}(u(X) \leq t) = \mathbb{P}(\ln(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq e^t) = \int_0^{e^t} 1dx = e^t.$$

Lo anterior es valido solo para $-\infty \leq t \leq 0$. La densidad esta dada por la derivada de la distribución:

$$f_{u(X)}(t) = F'_{u(X)}(t) = \begin{cases} e^t & , -\infty \leq t \leq 0 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Calculamos las esperanzas:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}(u(X)) = \int_{-\infty}^{0} te^t dt = -1,$$

$$u(\mathbb{E}(X)) = \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

El agente es averso al riesgo.

b) Los números $1, 2, ..., n$ son ubicados al azar uno tras otro. Determine la esperanza de la siguiente v.a.:

X: Cantidad de números que quedan ubicados correctamente exactamente en su posición.

Por ejemplo si el 2 esta en la segunda posición esta ubicado correctamente.
Ind: Puede ser útil escribir X como suma de v.a.'s., $X = \sum_i X_i$. ¿Son los X_i independientes?
R:
Definimos la v.a. X_i:

$$X_i = 1 \iff \text{el número } i \text{ cae en la posición } i,$$

$$X_i = 0 \iff \text{el número } i \text{ no cae en la posición } i.$$

Estas no son independientes. Y cada una de ellas distribuye como Bernoulli de parámetro $p = \frac{1}{n}$. Luego

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np = n\frac{1}{n} = 1.$$