

AUXILIAR 9

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADÍSTICA

PROFESOR: FERNANDO LEMA

AUXILIARES: MARTIN CASTILLO & ENRIQUE CALISTO

En memoria de Diego y Ezequiel.



Resumen

Teorema central del límite (TCL)

Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a.'s *i.i.d.* Sean $\mu = \mathbb{E}(X_i)$, $\sigma^2 = \text{Var}(X_i)$ la esperanza y varianza respectivamente. Sea $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, entonces $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ y $\text{Var}(S_n) = n\sigma^2$, y:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Z_n := \frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1) \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(Z_n \leq t) = \Phi(t)$$

donde $\Phi(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ cuando $X \sim N(0, 1)$, valor que se obtiene de la tabla.

1. Problemas

1. Sean $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_2 \sim N(\mu, \sigma^2)$, independientes. Considere

$$Z(t) = X_1 \cos(wt) + X_2 \sin(wt), \quad V(t) = \frac{dZ}{dt}(t)$$

Determine la distribución de $Z(t)$ y $V(t)$ (w fijo).

Solución: Usando las propiedades de suma de v.a. Normales independientes:

$$Z(t) \sim N \left(\mu(\cos(wt) + \sin(wt)), \sigma^2 \underbrace{(\cos(wt)^2 + \sin(wt)^2)}_1 \right)$$

$$V(t) = -wX_1 \sin(wt) + wX_2 \cos(wt) \sim N \left(\mu w(\cos(wt) - \sin(wt)), \sigma^2 \underbrace{((w\cos(wt))^2 + (-w\sin(wt))^2)}_{w^2} \right)$$

2. Pruebe usando el Teorema Central del Límite, que se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

Solución:

Recordemos que $X \sim \text{Poisson}(n)$, se tiene

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-n} n^k}{k!}$$

Además, si Y y Z son independientes y

$$Y \sim \text{Poisson}(\lambda), Z \sim \text{Poisson}(\beta) \Rightarrow Y + Z \sim \text{Poisson}(\alpha + \beta)$$

Queremos aplicar el *TCL* por lo que debemos tener la estructura de una suma de variables y luego normalizarla. Para esto podemos escribir X como sigue:

$$X = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \text{donde } Y_i \sim \text{Poisson}(1) \forall i, \text{ independientes}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{e^{-n} n^k}{k!} &= \mathbb{P}(X \leq n) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i \leq n\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n} \leq 1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n Y_i - n}{n} \leq 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - 1)}{n} \leq 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} T_n \leq 0\right) \\ &= \mathbb{P}(T_n \leq 0) \end{aligned}$$

donde $T_n = \frac{\sum_{k=0}^n (Y_i - 1)}{\sqrt{n}}$ (forma del *TCL*), pues $\mathbb{E}(Y_i) = 1 = \text{Var}(Y_i)$. Luego,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(T_n \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

3. Al sumar números un computador aproxima cada número al entero más próximo. Supongamos que todos los errores de aproximación son independientes y distribuidos uniformemente en $(-0,5, 0,5)$.

a) Si se suman 1500 números, ¿cuál es la probabilidad de que la magnitud del error total exceda 15?

Solución:

$$X_i \sim U(-0,5, 0,5), \quad \mathbb{E}(X_i) = \mu = 0, \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}(X_i)} = 0,288.$$

Nuevamente, queremos aplicar el *TCL*. Ahora, tenemos una suma de 1500 variables, o sea un n considerablemente grande, por lo que podemos decir que el teorema aplica. Sin embargo se debe normalizar, es decir $Z = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0, 1)$ ($\mu = 0$).

Se nos pide calcular $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > 15\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \leq 15\right)$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| \leq 15\right) &= \mathbb{P}\left(\left|Z\right| \leq \frac{15}{\sqrt{n}\sigma}\right) \quad (\alpha := \frac{15}{\sqrt{n}\sigma}) \\ &= \mathbb{P}(-\alpha \leq Z \leq \alpha) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(Z \leq -\alpha) + \mathbb{P}(Z > \alpha)) \\ &= 1 - 2\mathbb{P}(Z > \alpha) \\ &= 1 - 2(1 - \mathbb{P}(Z \leq \alpha)) \\ &= 1 - 2(1 - \Phi(\alpha)) \\ &= 1 - 2 \cdot 0,091 \\ &= 1 - 0,182 \\ &= 0,818\end{aligned}$$

Finalmente, la probabilidad pedida es

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| > 15\right) = 1 - 0,818 = 0,182$$

- b) ¿Cuántos números pueden sumarse juntos a fin de que la magnitud del error total sea menor que 10, con probabilidad de 0.9?

Solución:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|Z| \leq z) &= 0,9 \Leftrightarrow 1 - 2\mathbb{P}(Z > z) = 0,9 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z > z) = 0,05 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \leq z) = 0,95 \\ &\Leftrightarrow z = 1,645\end{aligned}$$

Pero, $z = \frac{10}{\sqrt{n}\sigma} \Rightarrow n = 444$.

4. a) Un grupo de partículas (α) tiene velocidades en m/s $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$. Se sabe que el 50 % de las partículas tiene velocidad mayores a 10 m/s y solo el 10 % tiene velocidades menores a 6 m/s.

- 1) Determine (estime) μ_X, σ_X^2 .

Solución: Como se trata de una v.a. normal, y es simétrica, de acuerdo al enunciado se tiene que

$$\mathbb{P}(Z > 10m/s) = 1/2 \Rightarrow \hat{\mu}_X = 10m/s$$

y además

$$\begin{aligned}
 0,1 &= \mathbb{P}(Z < 6) \\
 &= \mathbb{P}\left(\underbrace{\frac{Z - 10}{\sigma}}_{N \sim N(0,1)} < \frac{6 - 10}{\sigma}\right) \\
 &= \mathbb{P}\left(N > \frac{4}{\sigma}\right) \\
 &= 1 - \mathbb{P}\left(N < \frac{4}{\sigma}\right) \\
 &\Rightarrow \\
 0,9 &= \mathbb{P}\left(N < \frac{4}{\sigma}\right)
 \end{aligned}$$

Luego según la tabla de la $N(0,1)$, se tiene que $\frac{4}{\sigma} = 1,28$ $\hat{\sigma} = 3,1$

- 2) Suponga $X \sim N(10, 9)$ Se toman 5 partículas, calcule la probabilidad que:
 - Solo el primero tenga velocidad mayor a 10 m/s.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(x_1 > 10m/s, x_i \leq 10m/s, i = 2, 3, 4, 5) \\
 &= 1/2 \cdot (1/2)^4
 \end{aligned}$$

- La última tenga velocidad mayor a 10 m/s.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(x_5 > 10m/s) \\
 &= 1/2
 \end{aligned}$$

- Solo una tenga velocidad mayor a 10 m/s.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(x_j > 10m/s, x_i \leq 10m/s, i = 1, 2, 3, 4, 5 - \{j\}) \\
 &= 1/2 \cdot (1/2)^4 \binom{5}{1} \\
 &= 1/2 \cdot (1/2)^4 5 \\
 &= \frac{5}{2^5}
 \end{aligned}$$

- Al menos una tenga velocidad mayor a 10 m/s.

Solución:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(A) &= 1 - \mathbb{P}(x_j < 10m/s, j = 1, 2, 3, 4, 5) \\
 &= 1 - \frac{1}{2^5}
 \end{aligned}$$

- b) $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ otro grupo de partículas β tiene velocidades $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, $\mu_Y > \mu_X$ Sea

$$Q(c) = \mathbb{P}(X > c) + \mathbb{P}(Y < c)$$

Muestre que el valor de c que minimiza Q es c^* tal que

$$f_X(c^*) = f_Y(c^*)$$

y si $\sigma_X = \sigma_Y$, entonces

$$c^* = \frac{\mu_X + \mu_Y}{2}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{\partial Q(c)}{\partial c} \right|_{c^*} \\ &= \frac{\partial}{\partial c} (\mathbb{P}(X > c) + \mathbb{P}(Y < c)) \\ &= \frac{\partial}{\partial c} \left(\int_c^\infty f_X(x) dx + \int_{-\infty}^c f_Y(y) dy \right) \\ &= -f_X(c^*) + f_Y(c^*) \end{aligned}$$

si $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma$ y que $\mu_X < c^* < \mu_Y$ se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c^* - \mu_X}{\sigma}\right)^2} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{c^* - \mu_Y}{\sigma}\right)^2} \\ \Rightarrow \\ (c^* - \mu_X)^2 &= (c^* - \mu_Y)^2 \Rightarrow \\ c^* - \mu_X &= \mu_Y - c^* \Rightarrow \\ c^* &= \frac{\mu_X + \mu_Y}{2} \end{aligned}$$

- c) $X \sim N(10, 9), Y \sim N(12, 16)$ Se toma una partícula y se mide su velocidad resultando ser de 10 (m/s) (aprox) Calcule la probabilidad que sea una partícula α .

Solución: Primero usamos bayes y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \sim \alpha | \hat{Z} = 10) &= \mathbb{P}(Z = 10 | Z \sim \alpha) \frac{\mathbb{P}(Z \sim \alpha)}{\mathbb{P}(Z = 10)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Z = 10 | Z \sim \alpha) \mathbb{P}(Z \sim \alpha)}{\mathbb{P}(Z = 10 | Z \sim \alpha) \mathbb{P}(Z \sim \alpha) + \mathbb{P}(Z = 10 | Z \sim \beta) \mathbb{P}(Z \sim \beta)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{\mathbb{P}(Z=10|Z\sim\beta)\mathbb{P}(Z\sim\beta)}{\mathbb{P}(Z=10|Z\sim\alpha)\mathbb{P}(Z\sim\alpha)}} \end{aligned}$$

Por lo tanto nos interesa calcular el cuociente:

$$\frac{\mathbb{P}(Z = 10 | Z \sim \beta)}{\mathbb{P}(Z = 10 | Z \sim \alpha)}.$$

y ocupando el calculo infinitesimal lo de arriba se puede calcular así,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{10-\varepsilon}^{10+\varepsilon} f_Y(t) dt}{\int_{10-\varepsilon}^{10+\varepsilon} f_X(t) dt} \underset{L'opital}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_Y(10 + \varepsilon) + f_Y(10 - \varepsilon)}{f_X(10 + \varepsilon) + f_X(10 - \varepsilon)} = \frac{f_Y(10)}{f_X(10)}.$$

Luego la probabilidad buscada es:

$$\mathbb{P}(Z \sim \alpha | Z = 10) = \frac{f_X(10) \mathbb{P}(Z \sim \alpha)}{f_X(10) \mathbb{P}(Z \sim \alpha) + f_Y(10) \mathbb{P}(Z \sim \beta)}.$$