

CONTROL 1

MA3403 - PROBABILIDADES Y ESTADISTICA
PROFESOR: FERNANDO LEMA
AUXILIARES: ENRIQUE CALISTO & MARTÍN CASTILLO
13 DE ABRIL DE 2015

P1. a) Un naipe ingles se extiende sobre una mesa (una carta al lado de la otra). Calcule la probabilidad de que:

- 1) Las cartas queden agrupadas según pinta y en cada grupo estén ordenadas por número.

R:

Los casos totales corresponden a todas las formas en las que pueden quedar las cartas: $52!$.

Ahora si consideramos que todas las pintas están juntas y ordenadas, entonces lo único que puede cambiar es el orden en que salen las pintas, esto corresponde a $4!$. Entonces la probabilidad buscada es:

$$\frac{4!}{52!}.$$

- 2) No queden cartas del mismo color juntas.

R:

Los casos favorables se pueden contar alternando color en cada posición. Así en la primera posición puede salir cualquiera de las 52 cartas, pero para la posición que sigue debe ser de distinto color, por lo tanto hay 26 posibilidades, luego en la posición que sigue quedan 25 posibilidades y así vamos alternando hasta obtener $52 \cdot 26! \cdot 25!$ combinaciones posibles. La probabilidad buscada es:

$$\frac{(26!)^2 \cdot 2}{52!}.$$

- 3) No queden dos ases juntos.

R:

Para contar los casos favorables primero excluimos los ases del mazo. Las 48 cartas restantes se pueden ordenar de $48!$ formas posibles. Luego debemos contar la cantidad de formas en la que podemos introducir los ases sin que queden juntos, esto se hace considerando cada espacio entre cartas (incluyendo los espacios del lado izquierdo y derecho), los cuales corresponden a 49, y en cada uno de estos espacios puede haber a lo más un as. Entonces el problema se resume a elegir 4 espacios de un total de 49 lo cual se puede hacer de $\binom{49}{4}$, y debemos considerar las posibles permutaciones entre los ases que puede haber en cada selección de los 4 espacios. La probabilidad buscada es:

$$\frac{48! \cdot \binom{49}{4} \cdot 4!}{52!}.$$

b) Sean $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_s\}$.

- 1) Determine la cantidad de relaciones que se pueden construir entre A y B .

R:

Para cada par (a_i, b_j) existe la posibilidad de que estén relacionados o no. Como en total hay $r \cdot s$ pares ordenados entonces la cantidad de relaciones que se pueden construir corresponde a:

$$2^{r \cdot s}.$$

- 2) Determine la cantidad de funciones $f : A \rightarrow B$ que se pueden construir.

R:

Cada elemento a_i puede tener s posibles realizaciones. Como el conjunto A consta de r elementos la cantidad de funciones que se pueden construir corresponde a:

$$s^r.$$

- 3) Determine la cantidad de funciones $f : A \rightarrow B$ inyectivas que se pueden construir.

R:

Es claro que si hay más elementos en el dominio que en la imagen (caso finito) no hay posibilidad de que exista una función inyectiva entre ambos.

Por otro lado si $r \leq s$, entonces el problema se resume a contar la cantidad de grupos de tamaño r que se pueden elegir de un total de s : $\binom{s}{r}$, y luego contar las posibles permutaciones que se pueden hacer con los r elegidos: $r!$. Entonces la cantidad de funciones inyectivas que se pueden construir corresponde a:

$$\binom{s}{r} \cdot r!.$$

obs. Es interesante, y más difícil, el cálculo del número de funciones sobreyectivas.

- P2.** Una persona desea cruzar la frontera de un país llevando mercancía ilegal. En la aduana hay dos tipos de sondeos de equipaje: el sondeo regular que se lleva a cabo el 75 % de las veces y el sondeo exhaustivo, que se realiza el 25 % de las veces. Si es que hay mercancía ilegal en el equipaje, el sondeo regular la encuentra con probabilidad $1/10$, y el exhaustivo con probabilidad $1/2$.

- a) Calcule la probabilidad de que no descubran a la persona.

R:

Por probabilidades totales tenemos que:

$$\mathbb{P}(\text{no descubran}) = 0,75 \cdot \frac{9}{10} + 0,25 \cdot \frac{1}{2} = 0,8.$$

- b) Calcule la probabilidad de que le haya tocado el sondeo regular, dado que no la descubren.

R:

Usando Bayes:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{Sondeo Regular}|\text{no la descubren}) &= \mathbb{P}(\text{no la descubren}|\text{Sondeo Regular}) \frac{\mathbb{P}(\text{Sondeo Regular})}{\mathbb{P}(\text{no la descubren})} \\ &= \frac{9}{10} \cdot \frac{0,75}{0,8} = 0,843.\end{aligned}$$

- c) La primera vez que descubren a alguien con mercancía ilegal se le entrega un parte de cortesía, pero a la segunda se le aplica una multa. Si una persona pretende cruzar la frontera n veces con mercancía ilegal, calcule la probabilidad de que no la multen.

Ind: Piense en X : cantidad de veces que lo descubren.

R:

Aquí hay que darse cuenta que $X \sim B(n, 0,2)$. Y la probabilidad buscada corresponde a:

$$\mathbb{P}(\text{No sea multado}) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,8^n + n \cdot 0,8^{n-1} \cdot 0,2.$$

Producto de una nueva administración, cada vez que alguien es descubierto con mercancía ilegal es sometido a un juego que consiste en lanzar 2 dados y tratar de adivinar la suma, si adivina la persona se salva del parte o multa según corresponda. Las únicas alternativas posibles son 3, 5 y 9.

- d) En caso de la persona sea descubierta ¿A que número le recomendaría apostar?

R:

$$\mathbb{P}(\text{suma} = 3) = \frac{2}{6^2} < \frac{4}{6^2} = \mathbb{P}(\text{suma} = 5) = \mathbb{P}(\text{suma} = 9).$$

Por lo tanto conviene apostar al 5 o al 9.

e) ¿Como cambia el resultado c) con la nueva administración?

R:

Ahora definimos X como la cantidad de veces que lo descubren y no acierta en la suma de los dados. En donde $X \sim B(n, 0,2 \cdot \frac{8}{9})$.

$$\mathbb{P}(\text{No sea multado}) = \mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \left(1 - 0,2 \cdot \frac{8}{9}\right)^n + n \cdot \left(1 - 0,2 \cdot \frac{8}{9}\right)^{n-1} \cdot 0,2 \cdot \frac{8}{9}.$$

P3. a) Se dice que el evento A atrae a B si $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$, y repele a B si $\mathbb{P}(B|A) < \mathbb{P}(B)$. Muestre que si A atrae a B entonces:

1) B atrae a A y A repele a B^c .

R:

$$\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} \iff \mathbb{P}(A) < \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A|B).$$

Entonces B atrae a A .

Por otro lado:

$$\mathbb{P}(B) < \mathbb{P}(B|A) \iff 1 - \mathbb{P}(B|A) < 1 - \mathbb{P}(B) \iff \mathbb{P}(B^c|A) < \mathbb{P}(B^c).$$

Entonces A repele a B^c .

2) $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B|A^c)$.

R:

Es directo que $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$.

Ahora queremos probar que $\mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(B|A^c)$. Por probabilidades totales tenemos que:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c).$$

Aplicando la primera desigualdad llegamos a

$$\mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c).$$

Que es equivalente a:

$$\mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(B|A^c).$$

Luego

$$\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(B|A^c).$$

b) Dado el espacio muestral dado por el experimento 'sacar una carta de un mazo de naipes'. Encuentre los eventos A y B para que cumplan con ser:

1) Excluyentes y independientes.

R:

A y B deben cumplir con:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B). (\text{Independientes})$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0. (\text{Excluyentes})$$

Por lo tanto no queda otra que alguno de los dos tenga probabilidad cero. Así elegimos:

A : Sacar un corazon negro.

B : Cualquiera.

Y cumplen con lo deseado.

2) Excluyentes y no independientes.

R:

Elegimos:

A : Sacar un 2.

B : Sacar un 3.

Los cuales son claramente excluyentes y no son independientes:

$$\mathbb{P}(A) > 0 = \mathbb{P}(A|B).$$

3) No excluyentes y independientes.

R:

Elegimos:

A : Sacar Color Rojo.

B : Sacar un 2.

Los cuales no son excluyentes pues la probabilidad de sacar un 2 rojo es:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{52} > 0.$$

Y son independientes:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} = \frac{2}{26} = \mathbb{P}(B|A).$$

4) No excluyentes y no independientes.

R:

Elegimos:

A : Sacar Color Rojo.

B : Sacar un Corazón.

El cual es no excluyente pues:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{13}{52} > 0.$$

Y no independiente pues:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{13}{52} < \frac{13}{26} = \mathbb{P}(B|A).$$