MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesora: Karina Vilches - Auxiliar: Dario Palma

Ejemplo de resolución de sistema lineal no diagnalizable

Sea el sistema:

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$$

Lo que queremos hacer es diagnolaizar la matriz para que podamos utilizar el operador exponencial. Para esto obtendremos el determinante de la matriz (que llamaremos A):

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^4$$

de donde es claro que $\lambda = 1$ con $m = 4$. Si todo sale bien al buscar v_1 debiesemos tener cuatro vectores propios.

$$(A - \lambda I)V = 0$$
$$(A - I)V = 0$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las dos últimas filas son l.d. (A partir de acá ahorraremos en notación).

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} v = z \\ u = w - z \end{matrix}$$

$$V = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_1 + V_2$$

Luego la matriz no es diagonalizable pues solo obtuvimos dos vectores propios en lugar de cuatro. Por esto obtendremos la forma de Jordan de la matriz.

El procedimiento es el siguiente. Necesitamos encontrar mas valores propios, por esto buscaremos soluciones al espacio

$$(A-\lambda I)V_2 = V_1$$

dado un V_1 que

$$(A-\lambda I)V_1 = 0$$

Por esto mismo es equivalente encontrar los vectores propios

$$(A-\lambda I)V_2 = V_1 \ /(A-\lambda I)\cdot$$

$$(A-\lambda I)^2 V_2 = (A-\lambda I)V_1$$

$$(A-\lambda I)^2 V_2 = 0$$

Esto se llama buscar los vectores propios generalizados. Entonces:

$$(A-I)^2 V_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v = z$$

De donde

$$V_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

O bien podemos hacer:

$$(A-I)V_3 = V_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} u = u \\ v = 1 + w - u \\ w = w \\ z = 1 + w - u \end{matrix}$$

Y obtener

$$V' = u \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Acá es claro que el primer vector es l.d. con los anteriores. Es fácil verificar que el segundo también es l.d. por lo que nos quedamo sólo con el tercer vector y lo nombramos V_3

Luego nos falta encontrar el último vector:

$$(A-I)V_4 = V_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right| \to \begin{matrix} v = z-1 \\ u = 2+w-z \end{matrix}$$

$$V'' = z \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces si tomamos el último vector tenemos nuestros vectores propios que son l.i.

Observación: Recordemos que a medida que obtengamos vectores propios de este procedimiento debemos verificar que los vectores que seleccionemos sean l.i.

$$P = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cabe señalar que podríamos haber hecho

$$(A-I)^3 V_4 = 0$$

y haber escogido un vector l.i. cualquiera.

Finalmente hacemos los bloques de Jordan. Como tenemos que un vector esta asociado a dos vectores propios generalizados (V_2) esto indica que tendremos un bloque de Jordan de 3×3 y uno para V_1 de 1×1. Así siendo consecuente con el orden:

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Ahora que tenemos la diagonalización utilizaremos el operador exponencial. Para ello descompondremos la matriz en su componente diagonal y el otro.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + B$$

Así verifiquemos que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = 0$$

Entonces calculando la exponencial de J:

$$e^{Jt} = e^{Dt+Bt} = e^{Dt} \cdot e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot (\Sigma_{k=0}^{n} \frac{(Bt)^n}{n!})$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot (I + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2})$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^t & e^t t & e^t \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & e^t & e^t t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

Y bien la solución a la EDO está descrita como:

$$X(t) = e^{At} X_0$$

$$X(t) = P e^{Jt} P^{-1} X_0$$

$$X(t) = P e^{Jt} C$$

En el último paso se asocian las matrices.