MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Profesora: Karina Vilches
Auxiliar: Dario Palma

Guia Control 2

1 A considerar

La siguiente guía se enfoca en problemas de resolución algebraica sobre EDOs de orden n. Para eso hay que tener en cuenta que:

1. Al factorizar por los operadores diferenciales el lado homogéneo, esto es solo válido para EDO's con coeficientes constantes.

2. Podemos llevar una EDO de coeficientes variables a coeficientes constantes con el cambio de variable $y(x) = x^\alpha$ o usar el cambio de Euler $x = e^u \to y(x) = y(e^u) = z(u)$

3. Si tenemos una EDO no homogénea podemos aplicar anuladores siempre y cuando $Q(x)$ sea de la forma $e^x, xe^x, ..., x^n e^x, e^x cos(x), e^x sen(x), xe^x cos(x), xe^x sen(x), ..., x^n e^x cos(x), x^n e^x sen(x), 1, x, x^2, ..., x^n$ por alguna constante (Método de los coeficientes inderterminados).

4. Si no se cumple lo de arriba podemos aplicar la fórmula de Green:

$$y_p = \Sigma_{i=1}^n y_i (-1)^{i+n} \overline{Q}(x) \frac{W_i}{W}$$

con y_i solución homogénea, $\overline{Q}(x)$ normalizado y W_i definido como el Wronskiano al cual se elimina la columna i y la fila n. Esto para orden 2 es equivalente a hacer Variación de parámetros.

5. Los anuladores son:

$$D^n \to 1, x, x^2, ..., x^{n-1}$$

$$(D - \alpha)^n \to e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, ..., x^{n-1} e^{\alpha x}$$

$$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n \to e^{\alpha x} sen(\beta x), e^{\alpha x} cos(\beta x), ..., x^{n-1} e^{\alpha x} sen(\beta x), x^{n-1} e^{\alpha x} cos(\beta x)$$

cabe destacar que

$$(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2))^n (x^{n-1} e^{\alpha x} sen(\beta x) + x^5 e^{\alpha x} cos(\beta x) = 0$$

pues tienen los mismos α y β

6. Contamos con las fórmulas de Abel y Liouville, que son para EDOs de orden 2.

7. Recuerde que en nuestro espacio solución, las soluciones deben ser l.i.

2 n Ejercicios

P1 Determine las soluciones homogéneas:

1. $y''' + 2y'' - 8y' = 0$
2. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$
3. $y''' + 2y'' - 19y' - 20y = 0$
4. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$
5. $(D-1)^2(D+3)(D^2+2D+5)^2y = 0$
6. $(D+1)^2(D-6)^3(D+5)(D^2+1)(D^2+4)y = 0$
7. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
   $y(0) = -4,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -19$
8. $y^{(4)} = y$
9. $x^3y''' + x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,\ x > 0$
10. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 2x^2y'' - 4xy' + 4y = 0,\ x > 0$
11. $x^3y''' - 2x^2y'' + 13xy' - 13y = 0,\ x > 0$

P2 Anule las siguientes funciones y compruebe que su operador funciona:

1. $x^2 - 2x + 5$
2. $e^{3x} + x - 1$
3. $xsen(2x)$
4. $x^2e^{-2x}cos(3x)$
5. $x^2 - 2x + xe^{-x} + sen(2x) - cos(3x)$

P3 Determine las soluciones generales, homogénea mas particular:

1. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$
2. $y''' + y'' - 5y' + 3y = e^{-x} + sen(x)$
3. $y''' + y'' - 2y = xe^x + 1$
4. $y''' + 4y'' + y' - 26y = e^{-3x}senx(2x) + x$

5. $y'' - 5y' + 6y = cos(2x) + 1$

6. $y'' - 6y' + 9y = sen(2x) + x$

P4 Determine la solución con condiciones de borde:

1. $y''' + 2y'' - 9y' - 18y = -18x^2 - 18x + 22$
   $y(0) = -2,\ y'(0) = -8,\ y''(0) = -12$

2. $y''' - 2y'' + 5y' = -24e^{3x}$
   $y(0) = 4,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = -5$

P5 Utilice la fórmula de Green y determine la solución general:

1. $y''' - 3y'' + 4y = e^{2x}$

2. $y''' - 2y'' + y' = x$

3. $y''' + y' = tan(x),\ 0 < x < \pi/2$

4. $y''' + y' = sec(\theta)tan(\theta)$

5. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^4cos(x),\ x > 0$