

Guia Control 2

1 A considerar

La siguiente guía se enfoca en problemas de resolución algebraica sobre EDOs de orden n . Para eso hay que tener en cuenta que:

1. Al factorizar por los operadores diferenciales el lado homogéneo, esto es solo válido para EDO's con coeficientes constantes.
2. Podemos llevar una EDO de coeficientes variables a coeficientes constantes con el cambio de variable $y(x) = x^\alpha$ o usar el cambio de Euler $x = e^u \rightarrow y(x) = y(e^u) = z(u)$
3. Si tenemos una EDO no homogénea podemos aplicar anuladores siempre y cuando $Q(x)$ sea de la forma $e^x, xe^x, \dots, x^n e^x, e^x \cos(x), e^x \sen(x), xe^x \cos(x), xe^x \sen(x), \dots, x^n e^x \cos(x), x^n e^x \sen(x), 1, x, x^2, \dots, x^n$ por alguna constante (Método de los coeficientes indeterminados).
4. Si no se cumple lo de arriba podemos aplicar la fórmula de Green:

$$y_p = \sum_{i=1}^n y_i (-1)^{i+n} \overline{Q}(x) \frac{W_i}{W}$$

con y_i solución homogénea, $\overline{Q}(x)$ normalizado y W_i definido como el Wronskiano al cual se elimina la columna i y la fila n . Esto para orden 2 es equivalente a hacer Variación de parámetros.

5. Los anuladores son:

$$\begin{aligned} D^n &\rightarrow 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \\ (D - \alpha)^n &\rightarrow e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \dots, x^{n-1} e^{\alpha x} \\ [D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^n &\rightarrow e^{\alpha x} \sen(\beta x), e^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{n-1} e^{\alpha x} \sen(\beta x), x^{n-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) \end{aligned}$$

cabe destacar que

$$(D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2))^n (x^{n-1} e^{\alpha x} \sen(\beta x) + x^5 e^{\alpha x} \cos(\beta x)) = 0$$

pues tienen los mismos α y β

6. Contamos con las fórmulas de Abel y Liouville, que son para EDOs de orden 2.
7. Recuerde que en nuestro espacio solución, las soluciones deben ser l.i.

2 n Ejercicios

P1 Determine las soluciones homogéneas:

1. $y''' + 2y'' - 8y' = 0$

2. $y''' - 3y'' - y' + 3y = 0$

3. $y''' + 2y'' - 19y' - 20y = 0$

4. $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 0$

5. $(D - 1)^2(D + 3)(D^2 + 2D + 5)^2y = 0$

6. $(D + 1)^2(D - 6)^3(D + 5)(D^2 + 1)(D^2 + 4)y = 0$

7. $y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$
 $y(0) = -4, y'(0) = -1, y''(0) = -19$

8. $y^{(4)} = y$

9. $x^3y''' + x^2 - 2xy' + 2y = 0, x > 0$

10. $x^4y^{(4)} + 6x^3y''' + 2xy'' - 4xy' + 4y = 0, x > 0$

11. $x^3y''' - 2x^2y'' + 13xy' - 13y = 0, x > 0$

P2 Anule las siguientes funciones y compruebe que su operador funciona:

1. $x^2 - 2x + 5$

2. $e^{3x} + x - 1$

3. $x\text{sen}(2x)$

4. $x^2e^{-2x}\cos(3x)$

5. $x^2 - 2x + xe^{-x} + \text{sen}(2x) - \cos(3x)$

P3 Determine las soluciones generales, homogénea mas particular:

1. $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = e^x + x^2$

2. $y''' + y'' - 5y' + 3y = e^{-x} + \text{sen}(x)$

3. $y''' + y'' - 2y = xe^x + 1$

4. $y''' + 4y'' + y' - 26y = e^{-3x}\text{sen}x(2x) + x$

5. $y'' - 5y' + 6y = \cos(2x) + 1$

6. $y'' - 6y' + 9y = \sin(2x) + x$

P4 Determine la solución con condiciones de borde:

1. $y''' + 2y'' - 9y' - 18y = -18x^2 - 18x + 22$
 $y(0) = -2, y'(0) = -8, y''(0) = -12$

2. $y''' - 2y'' + 5y' = -24e^{3x}$
 $y(0) = 4, y'(0) = -1, y''(0) = -5$

P5 Utilice la fórmula de Green y determine la solución general:

1. $y''' - 3y'' + 4y = e^{2x}$

2. $y''' - 2y'' + y' = x$

3. $y''' + y' = \tan(x), 0 < x < \pi/2$

4. $y''' + y' = \sec(\theta)\tan(\theta)$

5. $x^3y''' - 3xy' + 3y = x^4\cos(x), x > 0$