

MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesora: Karina Vilches

Auxiliar: Dario Palma

Auxiliar 3 - Preparación Control 1

P1 Enunciado Auxiliar 2 - P1

P2 Considere la ecuación $y' = f(y)$ con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con derivada acotada. En este caso el teorema de existencia y unicidad provee la existencia de las soluciones del problema de valor inicial y la unicidad en $\mathbb{R}$.

- a Demuestre que si $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución entonces, si para algún t_0 se tiene $y'(t_0) = 0$ la función y es constante.
- b Suponga que $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una solución acotada de la ecuación, es decir existe $K > 0$ tal que $|y(t)| \leq K$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ y $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$ existen. Ind: Use la parte anterior.
- c Demuestre que todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = 1 + \cos(x)^2$ son no acotadas. Ind: Pruebe que si $y(t) \rightarrow a$ cuando $t \rightarrow \infty$ o $(t \rightarrow -\infty)$, entonces $f(a) = 0$ y use la parte anterior.

P3 Considere el siguiente problema de Cauchy

$$(PC2) \begin{cases} y' = t\sqrt{1-y} \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

Utilizando el teorema de Existencia Unicidad pruebe que el PC2 tiene única solución definida en algún intervalo abierto que contiene al punto $t = 0$. Luego Resuelva y termine de definir el intervalo.

P4 Considere la ecuación diferencial

$$y' = \frac{t}{1+t^2} \arctan y \cos y$$

Encuentre las soluciones constantes de la ecuación. Demuestre que se satisface la condición de Lipschitz (Use TVM).

P5 - Curvas de persecución "La toma del Puente". Durante la toma del puente Pío Nono, Panchito, un mechón de nuestra facultad, encuentra a un mechón de Derecho, Simón, merodeando en Plaza Italia. Simón al darse cuenta de que es asechado por Panchito, sale corriendo con velocidad v_d hacia su facultad. Si el mechón de ingeniería corre a una rapidez v_i constante, partió desde el punto $(c, 0)$, y siempre en dirección hacia el mechón de Derecho, encuentre la ecuación que describe la trayectoria de Panchito. Para esto:

- Obtenga la EDO que satisface $y(x)$.
- Derivando la expresión anterior con respecto a x vea que se tiene:

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} = -v_d \frac{dt}{dx}$$

- Para calcular $\frac{dt}{dx}$ en la ecuación anterior, comience por obtener el valor de la derivada $\frac{ds}{dx}$ de la longitud s del arco de curva descrito por $y(x)$. Para esto recuerde que

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Y que si s crece x decrece en nuestro caso.

- Observe que $\frac{ds}{dt}$ es la velocidad de Panchito v_i . Usando esto calcule $\frac{dt}{dx}$.
- Mediante la sustitución $p = \frac{dy}{dx}$ continúe y concluya.