

MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Profesora: Karina Vilches

Auxiliar: Dario Palma

Pauta P1 Auxiliar 2

Solución: Cabe notar que faltó definir que a_1 y a_2 son positivas para la resolución del problema. Con esto considerado primero definamos:

$$y'(t) = G(t, y(t)) = a_1 f(t)(1 - y(t)) - a_2 y(t) \quad (1)$$

Como (1) es continua con respecto a la primera variable pues $f(t)$ lo es y a_1, a_2 son constantes falta solo determinar si es Lipschitz con respecto a la segunda.

$$|G(x, y_1) - G(x, y_2)| = |a_1 f(t)(1 - y_1) - a_2 y_1 - (a_1 f(t)(1 - y_2) - a_2 y_2)| = |-a_1 f(t)y_1 - a_2 y_1 + a_1 f(t)y_2 + a_2 y_2| = |(y_2 - y_1)(a_1 f(t) + a_2)| \Leftrightarrow |G(x, y_1) - G(x, y_2)| \leq |(a_1 f(t) + a_2)| |y_2 - y_1|$$

Como $f(t)$ es continua, positiva y acotada luego podemos definir que esta es nuestra constante de Lipschitz. Se tiene que $G(t, y(t))$ es Lipschitz con respecto a la segunda variable y por lo tanto aplicando el TEU existe solución y es única.

Resolvemos:

$$\begin{aligned} y'(t) &= a_1 f(t) - y(t)(a_1 f(t) + a_2) \\ y'(t) + y(t)(a_1 f(t) + a_2) &= a_1 f(t) \\ \mu &= e^{\int_0^t (a_1 f(t) + a_2) dt} = e^{a_1 F(t) + a_2 t} \\ \frac{d}{dt}(y(t)e^{a_1 F(t) + a_2 t}) &= a_1 f(t)e^{a_1 F(t) + a_2 t} / \cdot \int_0^t dt \\ y(t)e^{a_1 F(t) + a_2 t} - \underbrace{y(0)e^{a_1 F(0)}}_C &= \int_0^t a_1 f(s)e^{a_1 F(s) + a_2 s} ds \\ y(t)e^{a_1 F(t) + a_2 t} &= \int_0^t a_1 f(s)e^{a_1 F(s) + a_2 s} ds - C \end{aligned}$$

Con la condición inicial, solo reemplazando $t = 0$, daría que:

$$y(t) = e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} \int_0^t a_1 f(s)e^{a_1 F(s) + a_2 s} ds - y_0 e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} \quad (2)$$

Con lo cual tenemos la forma de la solución $=)$ y es positiva pues todas las funciones de la derecha lo son.

Para lograr la desigualdad debemos jugar con la integral que tenemos definida. Hagamos una integral por partes con:

$$\begin{aligned} dv &= a_1 f(s) e^{a_1 F(s)} ds & u &= e^{a_2 s} \\ v &= e^{a_1 F(s)} & du &= a_2 e^{a_2 s} ds \end{aligned}$$

Y remplazamos en nuestra solución.

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} (e^{a_1 F(s)} e^{a_2 s} \Big|_0^t - \int_0^t a_2 e^{a_1 F(s)} e^{a_2 s} ds) - y_0 e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} \\ y(t) &= e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} (e^{a_1 F(t) + a_2 t} - 1 - \int_0^t a_2 e^{a_1 F(s)} e^{a_2 s} ds) - y_0 e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} \end{aligned}$$

Una vez hecho esto es claro que la integral en la expresión resulta siempre positiva por lo cual es aún mas claro que:

$$y(t) \leq e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} (e^{a_1 F(t) + a_2 t} - 1) - y_0 e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} \quad (3)$$

Que es lo pedido hasta el punto **b**). Si reordenamos la cota de nuestra función:

$$\begin{aligned} y(t) &\leq 1 - e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} - y_0 e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} \\ y(t) &\leq 1 + (y_0 - 1) e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} \end{aligned}$$

Como $y_0 \in [0, 1]$ se tiene que $(y_0 - 1) e^{-(a_1 F(t) + a_2 t)} \in [0, 1]$. Concluimos que $y(t) \leq 1$ y $0 \leq y(t)$ por (1).

Comentario: Finalmente siendo ordenado y consistente se puede ;). Espero que quede claro, y mejor explicado que durante la clase.