

MA2601-3 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
 Profesora: Karina Vilches
 Auxiliar: Dario Palma

Auxiliar 2

P1 Consideremos a_1, a_2 y $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, positiva y acotada. Es decir $\exists M > 0$ tal que $\forall t \geq 0, f(t) \in [0, M]$. Consideremos el siguiente problema de Cauchy.

$$(PC1) \quad \begin{cases} y'(t) = a_1 f(t)(1 - y(t)) - a_2 y(t), t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \in [0, 1] \end{cases}$$

El objetivo de esta pregunta es probar que con las hipótesis dadas la solución de este problema existe, es única y permanece acotada entre 0 y 1 para todo $t \geq 0$. Para ello proceda de la siguiente forma:

- a) Pruebe que existe una única solución global para (PC1) y encuéntrela. Puede serle útil considerar

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

Concluya que $\forall t \geq 0, y(t) \geq 0$

- b) A partir de la expresión encontrada para y en la parte anterior pruebe que

$$y(t) \leq y(0)e^{-[a_1 F(t) + a_2 t]} + e^{-[a_1 F(t) + a_2 t]}(e^{a_1 F(t)} e^{a_2 t} - 1)$$

- c) Concluya que $\forall t \geq 0, y(t) \in [0, 1]$

P2 Vea si existe solución según el TEU y encuentrela si corresponde.

$$(PC2) \quad \begin{cases} y' = -y \cos x + \cos x \sin x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(PC3) \quad \begin{cases} y'(t) = e^t \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

P3 Resuelva la siguiente EDO:

$$P' = P(1 - P) - H$$

Hint : Encuentre las soluciones constantes.

P4 - Isótopo radiactivo

Un isótopo radioactivo se desintegra a una tasa proporcional a la masa del isótopo presente.

1. Si $x(t)$ representa la masa del isótopo al instante t , pruebe que $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$ para alguna constante λ
2. El tiempo T que toma a la masa del isótopo en reducirse a la mitad se conoce como *vida media* del isótopo. Sabiendo que la vida media del isótopo del carbono 14 es de 5600 años, determine la masa restante al cabo de t años considerando que la masa inicial de la muestra era x_0 .