**MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones**
**Semestre Otoño 2015**
**Profesor:** Mauricio Soto
**Auxiliar:** Leonel Huerta

# Clase Auxiliar 8
# 8 de Mayo

P1. (a) Muestre que si $f(z) := \frac{1}{z^k}$, entonces $f$ es derivable en $z_0 \neq 0$ y se tiene que:

$$f'(z_0) = -\frac{k}{z_0^{k+1}}, \quad \forall z_0 \neq 0$$

(b) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $f$ es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.

(c) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \to C$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en $\Omega$ entonces $f$ también es constante. *Indicación:* Considere $|f|^2$.

(d) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|,\ z \in \mathbb{C}$. Pruebe que $f$ es derivable sólo en $z_0$.

P2. ***Control 2, Primavera 2011.***

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ tal que:

(i) Para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $f(z + w) = f(z)f(w)$

(ii) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Denotemos, como es usual, $z = x + iy$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

(a) Demuestre que $f(z) = e^x f(iy)$.

(b) Para todo $y \in R$, denote $u_0(y) = u(0, y)$ y $v_0(y) = v(0, y)$. Pruebe que $u_0$ y $v_0$ satisfacen el sistema de EDO siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dy} = -v_0 \\[2ex] \dfrac{dv_0}{dy} = u_0 \end{cases}$$

(c) Verifique que $u_0(0) = 1$ y que $v_0(0) = 0$, y resuelva el sistema de EDO de la pregunta anterior. Deduzca que $f(z) = e^z,\ \forall z \in \mathbb{C}$.