MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Leonel Huerta

Clase Auxiliar Extra
17 de Abril

P1. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de forma tal que su altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z = e^{-\theta}$, con $\theta \in [0, \infty[$.

(a) Encuentre una parametrización de la curva. Dibuje la curva.

(b) Calcule el largo de Γ

Solución:

(a) Dada la geometría del problema, usemos coordenadas cilíndricas. Recordamos que el vector posición viene dado por:

$$\vec{r}(\rho, \theta, z) = (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z)$$

Como la partícula se mueve sobre el cono:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ \Longrightarrow \rho^2 &= z^2 \\ \Longrightarrow \rho &= z \end{aligned}$$

Como además debe respetarse la relación:

$$z = e^{-\theta}$$

$$\Longrightarrow \rho(\theta) = z(\theta) = e^{-\theta}$$

Y, por lo tanto, podemos parametrizar la curva como:

$$\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta}\cos(\theta), e^{-\theta}\sin(\theta), e^{-\theta}) \ , \qquad \theta \in [0, \infty)$$

Dibujar en Latex fue muy complicado, así que el dibujo queda propuesto.

(b) Sabemos que:

$$\text{Largo}(\Gamma) = \int_a^b \|\frac{d\vec{r}}{dt}\| dt$$

(En este caso $a = 0,\ b = \infty$)

Calculemos entonces:

$$\vec{r}(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), e^{-t})$$
$$\implies \tfrac{d\vec{r}}{dt} = (-e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t), -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t), e^{-t})$$
$$\implies \|\tfrac{d\vec{r}}{dt}\|^2 =$$
$$e^{-2t}\cos^2(t) + \cancel{2e^{-2t}\sin(t)\cos(t)} + e^{-2t}\sin^2(t) + e^{-2t}\sin^2(t) - \cancel{2e^{-2t}\sin(t)\cos(t)} + e^{-2t}\cos^2(t) + e^{-2t}$$
$$= e^{-2t} + e^{-2t} + e^{-2t}$$
$$= 3e^{-2t}$$
$$\implies \|\tfrac{d\vec{r}}{dt}\| = \sqrt{3}e^{-t}$$

Y, por lo tanto:

$$\text{Largo}(\Gamma) = \int_0^\infty \sqrt{3}e^{-t}dt = \sqrt{3}\int_0^\infty e^{-t}dt = \sqrt{3}(-e^{-t}\big|_0^\infty) = \sqrt{3}$$

$\boxed{\text{P2.}}$ (a) Calcule el flujo del campo:

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^z \sin(y) + xy^2 z, e^x \cos(z) + x^2 yz, x^2)$$

A través del manto del cono de ecuación $z = r - 1,\ -1 \leq z \leq 0$ donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) ¿Es el campo $\vec{F}$ de la parte anterior el rotor de un campo $\vec{G}$ de clase C^2?

Solución: Para fijar ideas, es recomendable dibujar el cono, pero nuevamente fue muy difícil en Latex. Contestaremos primero la parte (b).

(b) Supongamos que la respuesta a la pregunta es sí. Es decir, que existe un campo vectorial $\vec{G}$ tal que $\vec{F} = \text{rot}(\vec{G})$.

Recordamos la propiedad 1.2.2.3 de la página 7 del apunte, *el rotor de un campo vectorial es solenoidal*, es decir:

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{G})) = 0$$

Equivalentemente, podemos escribir:

$$\text{div}(\vec{F}) = 0$$

Pero por otra parte, calculando la divergencia de $\vec{F}$, tenemos que:

$$\text{div}(\vec{F}) = 0 + y^2 z + 0 + x^2 z + 0 = (x^2 + y^2)z$$

Lo que es una contradicción.

Sigue que $\vec{G}$ no puede existir y la respuesta a la pregunta es negativa.

(a) Notemos primero que:

$$\int_{\text{Cono}} \vec{F} \cdot d\vec{A} \ = \ \int_{\text{Manto}} \vec{F} \cdot d\vec{A} \ + \int_{\text{Tapa}} \vec{F} \cdot d\vec{A} \tag{1}$$

Por lo que nos basta calcular:

$$\int_{\text{Cono}} \vec{F} \cdot d\vec{A} \quad , \quad \int_{\text{Tapa}} \vec{F} \cdot d\vec{A}$$

Y luego restar estos valores.

- Para calcular la integral sobre todo el cono, usemos el Teorema de la divergencia de Gauss (notar que se satisfacen las hipótesis del teorema). Así:

  $$\int_{\text{Cono}} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{Cono}} \text{div}(\vec{F}) dV$$

  Recordemos de la parte (b), que:

  $$div(\vec{F}) = (x^2 + y^2)z = \rho^2 z$$

Donde la última igualdad se tiene pasando a coordenadas cilíndricas.
Calculemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{Cono}} \text{div}(\vec{F})dV &= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{z+1}\int_{0}^{2\pi}(\rho^2 z)\rho d\theta d\rho dz \\
&= 2\pi\int_{-1}^{0}\int_{0}^{z+1}\rho^3 z d\rho dz \\
&= 2\pi\int_{-1}^{0}\frac{z(z+1)^4}{4}dz \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_{-1}^{0}z(z+1)^4 dz\right)
\end{aligned}$$

Con $u = z + 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0}z(z+1)^4 dz &= \int_{0}^{1}(u-1)u^4 du \\
&= \int_{0}^{1}(u^5 - u^4)du \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{5} \\
&= -\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que:

$$\int_{\text{Cono}} \vec{F}\cdot d\vec{A} = -\frac{\pi}{60}$$

- Calculemos ahora la otra integral.
  Notemos que en la tapa $\hat{n} = \hat{k}$. Luego:

$$\begin{aligned}
\int_{\text{Tapa}} \vec{F}\cdot d\vec{A} &= \int_{\text{Tapa}} \vec{F}\cdot \hat{n} dA \\
&= \int_{\text{Tapa}} \vec{F}\cdot \hat{k} dA \\
&= \int_{0}^{1}\int_{0}^{2\pi}\rho^2\cos^2(\theta)\rho d\theta d\rho \\
&= \frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi}\cos^2(\theta)d\theta \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Usando (1):

$$\int_{\text{Manto}} \vec{F}\cdot d\vec{A} = -\frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{4} = -\frac{4\pi}{15}$$

P3. ***Control 1, Primavera 2009.***

(a) Verifique que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$$

Es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar.

(b) Calcule $\int_\Gamma \vec{G}\cdot d\vec{r}$, donde:

$$\vec{G}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + 2z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$$

y Γ es la curva que consta del arco $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1,1,0)$ junto con el segmento recto de $(1,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

(c) Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\hat{n}$ y $\vec{F},\vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) \quad , \ \forall \vec{r} \in S$$

Muestre que:

$$(\text{rot}\vec{F})(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r}) = (\text{rot}\vec{G})(\vec{r})\cdot\hat{n}(\vec{r}) \quad , \ \forall \vec{r} \in S$$

De un ejemplo de $S, \vec{F}, \vec{G}$ que cumplan las condiciones anteriores pero

$$\text{rot}\vec{F}(\vec{r}) \neq \text{rot}\vec{G}(\vec{r}) \quad , \ \forall \vec{r} \in S$$

Indicación: Dado $\vec{r}_0 \in S$ utilice el teorema de Stokes en una familia de superficies adecuadas (pequeñas y centradas en $\vec{r}_0$).

Solución:

La pauta de esta pregunta la encuentran en la página del DIM.

Link:
http://www.docencia.dim.uchile.cl/calculo_avanzado/material/pautas/pauta_c1_ma2002_2009-2.pdf