

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.

Control 2 MA2002-01 Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Jaime González E.

Auxiliar: Carlos Duarte C.

Semestre Verano 2009

Fecha: Lunes 11 de Enero de 2010

Todas las respuestas deben ser justificadas. Entregar las preguntas en hojas separadas. Cada pregunta vale un tercio de la nota final.

P1.-

a) **(2.0 pts)** Obtenga la representación polar y cartesiana de $i^{\log(1+i)}$.

b) **(2.0 pts)** Determine las condiciones para z de modo que:

$$\left| \frac{z - iw}{i - \bar{z}w} \right| = 1$$

c) **(2.0 pts)** Sea $z \in \mathbb{C}$ y $w = z^2 + 2 \cdot (\operatorname{Im}(z))^2$. Determine y grafique los conjuntos:

A: todos los z tales que $w = 2 + i$.

B: todos los z tales que $|w| < 1$ y $\operatorname{Im}(w) > 1$.

Solución:

a) Aplicando logaritmo:

$$\begin{aligned} \log(z) &= \log(i) \cdot \log(1+i) \\ &= [\log|i| + i \arg(i)][\log|1+i| + i \arg(1+i)] \\ &= \frac{i\pi}{2} \left[\log \sqrt{2} + \frac{i\pi}{4} \right] \\ &= -\frac{\pi^2}{8} + \frac{i\pi \log \sqrt{2}}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

Luego

$$z = e^{-\frac{\pi^2}{8}} e^{\frac{i\pi \log \sqrt{2}}{2}}$$

Como la representación polar es de la forma $z = re^{i\theta}$ tenemos que

$$r = e^{-\frac{\pi^2}{8}} \quad \theta = \frac{\pi \log \sqrt{2}}{2}$$

Por otra parte de la fórmula de Euler $e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$, se tiene la representación cartesiana:

$$z = e^{-\frac{\pi^2}{8}} \cos\left(\frac{\pi \log \sqrt{2}}{2}\right) + ie^{-\frac{\pi^2}{8}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \log \sqrt{2}}{2}\right)$$

b) La expresión es equivalente a:

$$\frac{(z - iw)\overline{(z - iw)}}{(i - \bar{z}w)\overline{(i - \bar{z}w)}} = 1$$

Luego:

$$\begin{aligned}(z - iw)\overline{(z - iw)} &= (i - \bar{z}w)\overline{(i - \bar{z}w)} \\(z - iw)(\bar{z} + i\bar{w}) &= (i - \bar{z}w)(-i - z\bar{w}) \\|z|^2 + iz\bar{w} - iw\bar{z} + |w|^2 &= 1 - iz\bar{w} + iw\bar{z} + |z|^2|w|^2\end{aligned}$$

Igualando parte real e imaginaria:

$$|z|^2 + |w|^2 = 1 + |z|^2|w|^2 \quad (2)$$

$$z\bar{w} - w\bar{z} = -z\bar{w} + w\bar{z} \quad (3)$$

$$(4)$$

De (2) se tiene que $|z| = 1$ si $|w| \neq 1$

De (3) se tiene que $2(z\bar{w} - w\bar{z}) = \operatorname{Im}(z\bar{w}) = 0$.

c) Sea $z = x + iy$, al reemplazar en la ecuación:

$$w = (x + iy)^2 + 2y^2$$

Para el conjunto A $w = 2 + i$ luego igualando parte real e imaginaria:

$$x^2 + y^2 = 2 \quad 2xy = 1$$

Igualando ambas ecuaciones:

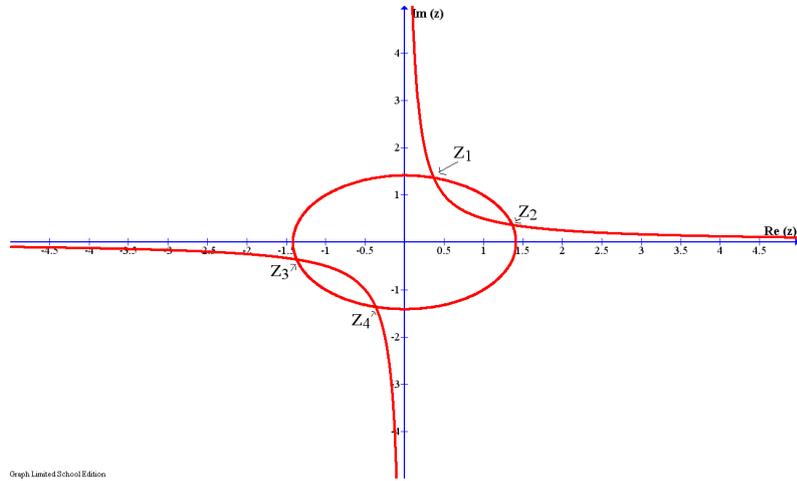
$$\left(\frac{1}{2y}\right)^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lo que implica la existencia de cuatro puntos, dados por (ver figura):

$$\left(\frac{1}{\pm 2\sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}}, \sqrt{1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

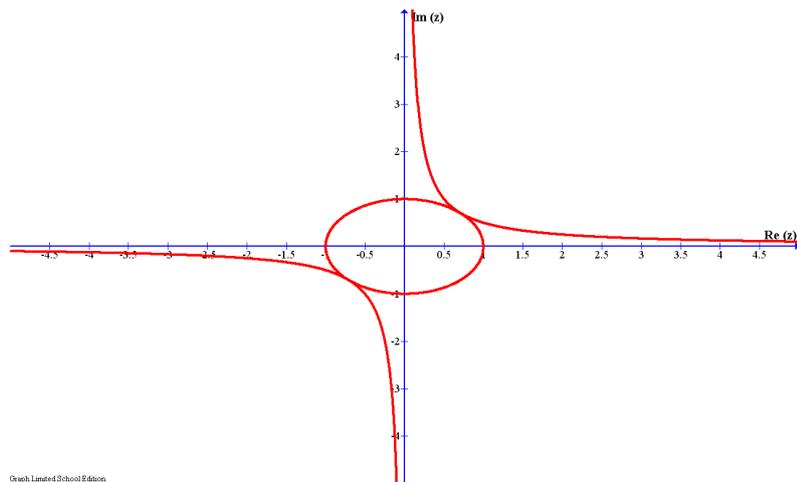
Para el conjunto B dadas las condiciones, se tiene:

$$x^2 + y^2 < 1 \quad 2xy > 1$$



Graph Limited School Edition

Figura 1: Problema 1 parte c. conjunto A



Graph Limited School Edition

Figura 2: Problema 1 parte c. conjunto B

El conjunto es vacío ya que las curvas son tangentes entre si (se intersectan en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$). Como las desigualdades son estrictas, no hay un conjunto de puntos que cumpla ambas desigualdades.(ver figura).

P2.-

a) (3.0 pts) Estudiar la derivabilidad y holomorfia de:

$$f(z) = 2\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z) + i\operatorname{Mod}(z)$$

Calculando $f'(z)$ cuando exista.

b) (2.0 pts) Sea f holomorfa en A abierto y sea g definida por:

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

Determine si g es holomorfa en A . Ind: $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

c) (1.0 pts) Determine el radio y la región de convergencia de la serie.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{2n+1} (z-i)^{2n}$$

Solución:

a) Sea $z = x + iy$, luego la función en términos de x e y es:

$$f(z) = \underbrace{2xy}_{u(x,y)} + i \underbrace{\sqrt{x^2 + y^2}}_{v(x,y)}$$

Debemos aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x = -\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (2)$$

(1) \cdot x + (2) \cdot y, llegamos a que $xy = 0$, para ello hay 3 posibilidades:

Si $x = 0$ e $y = 0$, esta opción no es válida ya que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \nexists \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \nexists$$

Si $x \neq 0$ e $y = 0$ implica que $2\sqrt{x^2 + y^2} = -1$ cosa que no puede ser ya que $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$.

Si $y \neq 0$ e $x = 0$ implica $2\sqrt{x^2 + y^2} = 1$ lo que lleva a $x = 0$ e $y = \pm \frac{1}{2}$. Luego es derivable en $z = \pm \frac{i}{2}$:

Luego:

$$f' \left(\frac{i}{2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(h + \frac{i}{2} \right) - f \left(\frac{i}{2} \right)}{h} = 1$$

$$f' \left(-\frac{i}{2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(h - \frac{i}{2} \right) - f \left(-\frac{i}{2} \right)}{h} = -1$$

b) f es holomorfa en A ssi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u, v \in C^1$, además u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann. Por otra parte $g(z)$ está bien definida en $z \in A \rightarrow \bar{z} \in A$ implica que $f(z) \in \mathbb{C}$ $g(z) \in \mathbb{C}$, existen U y V tales que:

$$g(z) = U(x, y) + iV(x, y) \Rightarrow g(z) = u(x, -y) - iv(x, -y)$$

Aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann para g :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Luego U y V cumple $C - R$ lo que implica que g es holomorfa en A .

c) Sea $k = 2n$ luego la serie se define por: $c_k = \frac{e^{\frac{ik}{2}}}{k+1}$ si k es par. $c_k = 0$ si k es impar.

$R^{-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\sup |c_k|} = 1$ ya que $|e^{\frac{ik}{2}}| = 1$, luego la serie posee $R = 1$ con centro i , que es equivalente a que converge en el disco $D(i, 1)$.

P3.-

a) **(1.5 pts)** Sea f holomorfa en A abierto, que contiene a $z = 0$. Sea γ una curva contenida en A y que encierra a $z = 0$. Calcule:

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z^3} + iz^3 + \frac{2}{z} \right) f(z) dz$$

En términos de $f(0)$ y $f'(0)$.

b) **(1.5 pts)** Determine los ceros y polos (con sus órdenes) de la función:

$$f(z) = \frac{e^{2z} \operatorname{sen}(z)}{z^3(z+i)}$$

c) **(3.0 pts)** Calcule usando fórmulas de Cauchy y residuos:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

donde f es la función de la parte b) y $\gamma : |z - 1 - i| = r > 0$.

Solución:

a) Como $\frac{(f(z))^2}{z^3}$, $iz^3f(z)$ y $\frac{2f(z)}{z}$ son holomorfas por álgebra de funciones holomorfas, podemos aplicar las fórmulas de Cauchy, y dividiendo la integral en tres:

$$I_1 = \oint_{\gamma} \frac{[f(z)]^2 dz}{z^3} = \frac{2\pi i}{2!} (f^2(0))''$$

$$I_1 = \pi i [2f(0)f'(0)]' = 2\pi i [[f'(0)]^2 + f(0)f''(0)]$$

Por teorema de Cauchy-Goursat:

$$I_2 = \oint_{\gamma} iz^3 f(z) dz = 0$$

Finalmente calculamos:

$$I_3 = \oint_{\gamma} \frac{2f(z) dz}{z} = 2 \frac{2\pi i}{0!} f(0) = 4\pi i f(0)$$

Luego:

$$\oint_{\gamma} \left(\frac{f(z)}{z^3} + iz^3 + \frac{2}{z} \right) f(z) dz = I_1 + I_2 + I_3 = 2\pi i [[f'(0)]^2 + f(0)f''(0) + 2f(0)]$$

b) Los ceros son tales que $\operatorname{sen}(z) = 0$ y $z^3(z+i) \neq 0$, esto nos lleva a que los ceros son $z_0 = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$. Para ver el orden derivamos:

$$f'(z) = \frac{e^{2z}(\cos(z) + 2\operatorname{sen}(z))z^3(z+i) - e^{2z}\operatorname{sen}(z)(4z^3 + 3z^2i)}{z^6(z+i)^2}$$

$$f'(z_0) = \frac{(-1)^k e^{2\pi k}}{(k\pi)^3(k\pi+i)} \neq 0$$

Luego el cero es de orden 1. Por otra parte los polos son $z_1 = 0$ y $z_2 = -i$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z}}{z+i} \cdot \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = \frac{1}{i} = -i \neq 0$$

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z}\operatorname{sen}(z)}{z^3} = ie^{2i}\operatorname{sen}(i) \neq 0$$

Luego $z_1 = 0$ es un polo de orden 2 y $z_2 = -i$ es un polo de orden 1.

c) Sea $z_0 = 1+i$, $z_1 = 0$ y $z_2 = -i$, con esto podemos determinar los límites de $r > 0$, así $|z_0 - z_1| = \sqrt{2}$ y $|z_0 - z_2| = \sqrt{5}$. Luego: Si $0 < r < \sqrt{2}$, por teorema de Cauchy-Goursat (ya que no encerramos ningún polo):

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Si $\sqrt{2} < r < \sqrt{5}$, utilizamos la fórmula de Cauchy ya que encerramos un solo polo z_1 :

$$\oint_{\gamma} \frac{g(z)}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} g'(0)$$

Con $g(z) = z^2 f(z) = \frac{e^{2z} \operatorname{sen}(z)}{z(z+i)}$. Ahora debo calcular $g'(z)$ y evaluar en $z = 0$:

$$g'(z) = \left(\frac{e^{2z}}{(z+i)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \right)'$$

$$g'(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} \cdot \frac{2e^{2z}(z+i) - e^{2z}}{(z+i)^2} + \frac{e^{2z}}{(z+i)} \cdot \frac{z \cos(z) - \operatorname{sen}(z)}{z^2}$$

Aplicando límite cuando z tiende a 0 ($g'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} g'(z)$), además:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z} = 1 \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2e^{2z}(z+i) - e^{2z}}{(z+i)^2} = 1 - 2i \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z}}{(z+i)} = -i$$

Para el último límite usamos *L'Hopital*:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos(z) - \operatorname{sen}(z)}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-z \operatorname{sen}(z) + \cos(z) - \cos(z)}{2z} = 0$$

Por álgebra de límites:

$$\lim_{z \rightarrow 0} g'(z) = 1 - 2i$$

$$\oint_{\gamma} \frac{g(z)}{z^2} dz = \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i(1 - 2i)$$

Si $r > \sqrt{5}$, usamos el teorema del residuo:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2))$$

Calculando los residuos (son resultados conseguidos anteriormente):

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow -i} (z+i)f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{2z} \operatorname{sen}(z)}{z^3} = ie^{2i} \operatorname{sen}(i)$$

$$\operatorname{Res}(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} g'(z) = 1 - 2i$$

Así:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)) = 2\pi i(1 - 2i + ie^{2i} \operatorname{sen}(i))$$