MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Leonel Huerta

Clase Auxiliar 13
7 de Agosto

P1. Control 2, primavera 2012.

Considere el polinomio $p(z) = (z + (1 + i))(z + (1 - i))$. Se desea calcular:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)} dt$$

(i) Compruebe que: $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \dfrac{1}{z + (1 + i)} + \dfrac{1}{z + (1 - i)}$

(ii) Para la curva γ_R formada por los dos arcos regulares, $L_R = [-iR, iR]$ y la semicircunferencia $S_R = \{z \ : \ |z| = R, \ \mathbb{R}e(z) \leq 0\}$ (curvas que dependen de $R > 0$), muestre que:

$$\int_{\gamma_R} \frac{p'(z)}{p(z)} dz = 4\pi i$$

(iii) Muestre que:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z + (1 + i)} = \lim_{R \to \infty} \int_{S_R} \frac{dz}{z + (1 - i)} = i\pi$$

(iv) Usando los resultados anteriores, calcule:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p'(it)}{p(it)} dt$$

P2. Sea $(C_k)_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$. Para $z \in \mathbb{C}$, consideremos $S(z)$, la serie definida como[1]:

$$S(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

Definamos la *parte positiva* de S como: $P(z) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$

Y la *parte negativa* como: $N(z) := \displaystyle\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} ((z - a)^{-1})^k$.

[1] A este tipo de series se les conoce como **series de Laurent**.

Dado $z \neq a$, diremos que la serie de Laurent S converge si $P(z)$ y $N(z)$ convergen.

(a) Defina:

$$R_1 := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|} \quad \text{y} \quad R_2 := 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k}$$

Con la convención $1/0 = \infty$.

Muestre que si $R_1 < R_2$, entonces S converge $\forall z \in A$, donde:

$$A := \{z \in \mathbb{C} \ : \ R_1 < |z-a| < R_2\}$$

Y define una función holomorfa en A.

(b) De manera recíproca, dados $a \in \mathbb{C}, \ 0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$, se puede probar que si $f : A \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, entonces existen constantes $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C}$ tales que:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \ \forall z \in A$$

Más aún:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{k+1}} dw$$

Para cualquier r tal que $R_1 < r < R_2$, donde $\partial D(a,r)$ es recorrida en sentido antihorario.

I. Considere entonces $f(z) := e^{1/z}$. Encuentre su serie de Laurent en el anillo $A := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| > 0\}$.

II. Encuentre la serie de Laurent de la función $g(z) := \dfrac{1}{z^2(1-z)}$ para $0 < |z| < 1$.

III. Encuentre la serie de Laurent de g para $|z-1| < 1$.

$\boxed{\text{P3.}}$ (a) Encuentre la serie de Fourier de:

I $f(x) = |x|$ en $[-\pi, \pi]$.

II $f(x) = ax$ en $[-\pi, \pi]$.

III $f(x) = |\sin(x)|$ en $[-\pi, \pi]$.

(b) Desarrolle en serie de Fourier la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in (-\pi, 0) \\ \sin(x) & , \quad x \in (0, \pi) \end{cases}$$