P3) (a) Demuestre que la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2i}\frac{e^{iz}-1}{z}, & z \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \end{cases}$$

es holomorpha en todo el plano complejo.

(2 pts.)

(b) Sea γ_R una curva en plano superior que consiste del segmento $[-R, R]$ y la semicircunferencia de radio R y centro en el origen, orientada positivamente. Usando la parte anterior demuestre que para todo $R > 0$, se tiene que

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = 0.$$

(2 pts.)

(c) Tomando el limite $R \to \infty$ concluye

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi.$$

(2 pts.)

Solución:

(a) Primero notemos que si $z \neq 0$, la función es homomorfa por ser cuociente de funciones homomorfas.

(1.0 pts.)

Si $z = 0$, debemos probar si es derivable por definición, es decir, debemos si el límite

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

existe. En efecto, usando L'Hopital se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z} &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z}\left(\frac{1}{2i}\frac{e^{iz}-1}{z} - \frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{e^{iz}-1-iz}{2iz^2}\right) \\ &= \lim_{z\to 0}\left(\frac{ie^{iz}-i}{4iz}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\frac{-e^{iz}}{4i}\right) = \frac{-1}{4i} = \frac{i}{4},\end{aligned}$$

lo que muestra que el límite existe y la fucnión es derivable en todo $\mathbb{C}$.

(1.0 pts.)

(b) Dado que la fucnión no tiene polos al interior de la curva y ella es una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$, se tiene que

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = 0.$$

(2.0 pts.)

(c) Notemos que la curva γ_R tiene dos partes, una es la recta entre $-R$ y R y la otra es el arco de la semicircunferencia de radio R, que denotaremos por C_R, es decir,

$$0 = \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx + \int_{C_R} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz$$

o equivalentemente

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}-1}{x}\,dx = \int_{-R}^{R} \frac{(\cos x - 1) + i \operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z}\,dz$$

(0.5 pts.)

Estudiemos la integral

$$\int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z}\,dz.$$

En efecto, si consideramos la parametrización $z = Re^{i\theta}$, desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$. Entonces

$$\int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z}\,dz = \int_0^{\pi} \frac{1-e^{iRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}}\, iRe^{i\theta} d\theta = i\int_0^{\pi} \left(1 - e^{iRe^{i\theta}}\right) d\theta = i\pi - i\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta.$$

(0.5 pts.)

Estudiemos la última integral que aparece, en efecto veamos que si $R \to \infty$ entonces ella tiende a cero, es decir,

$$\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi} e^{iR(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)} d\theta \quad = \quad \int_0^{\pi} e^{-R(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)} d\theta \quad =$$

luego

$$\left|\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta\right| \le \int_0^{\pi} \left|e^{-R(\operatorname{sen}\theta + i\cos\theta)}\right| d\theta = \int_0^{\pi} \left|e^{-R\operatorname{sen}\theta} e^{iR\cos\theta}\right| d\theta$$
$$= \int_0^{\pi} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta$$

Pero como para todo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\operatorname{sen}\alpha \ge \frac{2\alpha}{\pi}$, entonces tomando límite $R \to +\infty$ se tiene que

$$0 \le \left|\int_0^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} d\theta\right| \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\operatorname{sen}\theta} d\theta \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2\theta}{\pi}}\, d\theta$$
$$= 2\frac{e^{-R\frac{2\theta}{\pi}}}{\frac{-2R}{\pi}}\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{e^{-R}}{\frac{-2R}{\pi}} - 2\frac{1}{\frac{-2R}{\pi}} \to 0,$$

Por lo tanto

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z}\,dz = i\pi$$

(0.5 pts.)

y luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x - 1) + i\operatorname{sen} x}{x}\,dx = i\pi$$

es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x - 1)}{x}\,dx = 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \pi$$

(0.5 pts.)